

Повторення В Лекції 1 ми розглянули:

Поняття про первісну

Озн. $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ є первісною $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, де X - скінц. або некск. інтервал, якщо

$$\forall x \in X \quad F'(x) = f(x)$$

Невизначений інтеграл функції $f: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \{ F(x) + C \}_{C \in \mathbb{R}}$$

це множина первісних f

Таблиця основних первісних.
(доведення їх за означенням)

Адитивність операції інтегрування,
лінійності

Заміна змінних

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad \int f(\varphi(t)) d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C$$

Інтегрування за частинами

$$\int u(x) dV(x) = u(x)V(x) - \int V(x) du(x)$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{\arctg x}_{V} dx = \frac{1}{3} \int \arctg x dV^3 = \frac{1}{3} x^3 \arctg x -$$

$$\begin{aligned} u &= \arctg x \\ x^3 dx &= dV \\ V &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{3} \int x^3 (\arctg x)' dx = \frac{1}{3} x^3 \arctg x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \arctg x - \frac{1}{3} \int \frac{x^2 \overset{1}{d} x^2}{1+x^2} = \left(\int dx^2 - \int \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} \right)$$

Повторення Ми інтегруванням частинами (2)
отримали, що

$$I_n = \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$$

Інтегрування раціональних функцій

Ми розглянули знаходження первісних від
простих дробів

$$\int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C$$

$$k \neq 1 \quad \int \frac{A dx}{(x-a)^k} = A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$$

$$\frac{p^2}{4} - q < 0 \quad \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = \int \frac{Mx+N}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right]^k} dx$$

$$x + \frac{p}{2} = t$$

$$dx = dt$$

$$x = t - \frac{p}{2}$$

$$-\frac{p^2}{4} + q > 0, \quad q - \frac{p^2}{4} = a^2$$

$$= \int \frac{M(t - \frac{p}{2}) + N}{[t^2 + a^2]^k} dt = M \int \frac{t dt}{[t^2 + a^2]^k} +$$

$$+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right) \int \frac{dt}{[t^2 + a^2]^k} = I_n$$

$$= \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{[t^2 + a^2]^k} = \frac{M}{2} \int \frac{du}{u^k} \quad \begin{matrix} k=1 \rightarrow \\ k \neq 1 \rightarrow \end{matrix}$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+x+2} dx = \int \frac{x+2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 2 - \frac{1}{4}} dx = \int \frac{t - \frac{1}{2} + 2}{t^2 + \frac{7}{4}} dt$$

$$x + \frac{1}{2} = t$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} =$$

$$\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$= \int \frac{t dt}{t^2 + \frac{7}{4}} + \frac{3}{4} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{7}{4}} = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{\frac{7}{4}}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + \frac{7}{4})}{t^2 + \frac{7}{4}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2t}{\sqrt{7}} + \frac{1}{2} \ln |t^2 + \frac{7}{4}| + C = \dots$$

$$t = x + \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} \int \frac{x^4+1}{x^5+x^4-x^3-x^2} dx =$$

$$x^5+x^4-x^3-x^2 = x^2(x^3+x^2-x-1) = x^2[x^2(x+1)-(x+1)] = x^2(x+1)^2(x-1)$$

$$\frac{x^4+1}{x^2(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2}$$

$$x^4+1 = A x(x-1)(x+1)^2 + B(x-1)(x+1)^2 + C x^2(x+1)^2 + D x^2(x^2-1) + E x^2(x-1)$$

$$\underline{x=0}, \underline{x=1}, \underline{x=-1} \Rightarrow B=-1, C = \dots$$

$$\textcircled{2} \int \frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} dx$$

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

$$\textcircled{3} \int \frac{6x^2+x+2}{2x^3-x-1} dx = \quad 2x^3-x-1 = (x-1)(2x^2+2x+1)$$

$$\frac{6x^2+x+2}{2x^3-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{2x^2+2x+1}$$

$$6x^2+x+2 = A(2x^2+2x+1) + (x-1)(Mx+N)$$

Therefore
x=1
5=5A A=1

$$x^2: 6 = 2A + M \Rightarrow M=4, N=3$$

$$-2 = A - N$$

$$= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{4x+3}{2x^2+2x+1} dx = \ln|x-1| + \int \frac{d(2x^2+2x+1) + dx}{2x^2+2x+1}$$

$$= \ln|x-1| + \ln(2x^2+2x+1) + \left(\int \frac{dx}{2(x^2+x+\frac{1}{2})} \right) = \frac{1}{2} \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}}$$

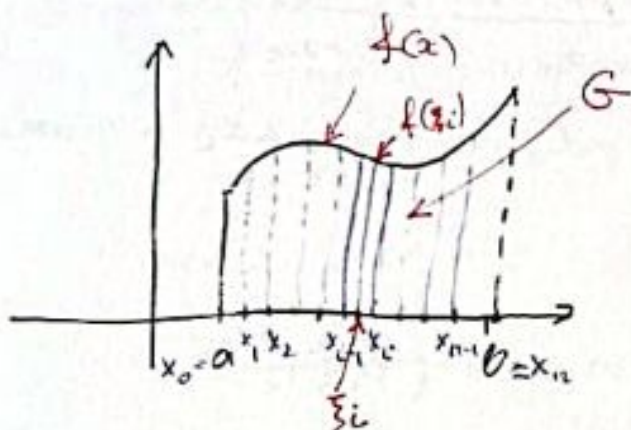
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \operatorname{arctg}(2x+1)$$

Інтеграл Рімана

①

1. Задача про знаходження площі, зв'язок її з невіднесеним інтегралом.

Розглянемо криволінійну трапецію.



$f(x)$ - неперервна ф-ія

Задача.

Знайти площу кривол. трапеції G .

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \approx \text{пл. } G$$

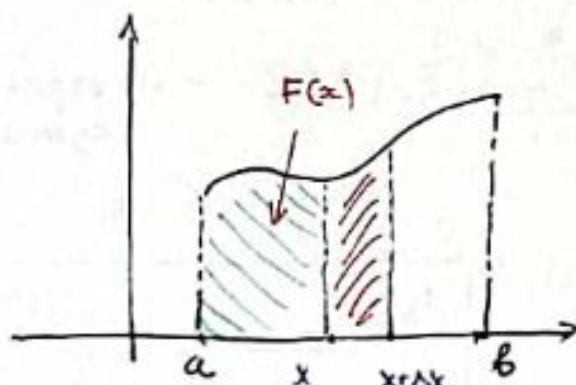
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$i = 1, 2, \dots, n$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \text{площа } G$$

Цю величину позначимо

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$



Позначимо $F(x)$ площу криволінійної трапеції

$$\{(x, y) | \dots \dots \dots \}$$

Знайдемо похідну ф-ї $F(x)$

$F(x+\Delta x) - F(x)$ - заштрих. площа

$$m \Delta x \leq F(x+\Delta x) - F(x) \leq M \Delta x$$

$$m \leq \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \leq M$$

$$M = \sup_{[x, x+\Delta x]} f(x)$$

$$m = \inf_{[x, x+\Delta x]} f(x)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} M = f(x)$$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

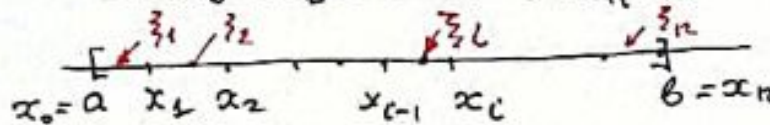
$$\Rightarrow F(x) - \text{первічна } f(x),$$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

2. Означення інтеграла Рімана

а) Розбиття відрізка $[a, b]$

Означ. Скінченна множина точок $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \quad p[a, b] = p$$


$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}; \quad d(p) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i - \text{diam. розв.}$$

$$\forall i \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

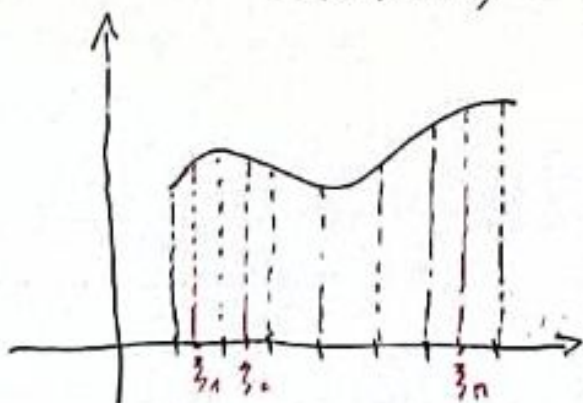
Розбиття з вибр. точками (p, ξ)

$$p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}; \quad \xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

б) Інтегральна сума

Нехай $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (p, ξ) - розбиття з вибр. точк.

$$S(f, (p, \xi)) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - \text{інтегральна сума}$$



$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d(p) \rightarrow 0} S(p, \xi)$$

б) Інтеграл Рімана

$$\int_a^b f(x) dx = I = \lim_{d(p) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (p, \xi) [d(p) < \delta \Rightarrow |I - S(p, \xi)| < \varepsilon]$$

Необхідна умова інтегрованості функції

(3)

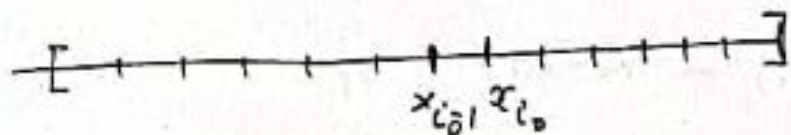
Озн. f -інтегрована на $[a, b] \iff \exists \int_a^b f(x) dx \dots$

Теорема. f -інтегр. на $[a, b] \Rightarrow f$ -обмежена на $[a, b]$

Доведення. Доведення від супрот. Покажемо, що
 $\exists f$ -необ. $\Rightarrow f$ -неінтегр., тобто $\nexists \lim S(p, \xi)$

$$\forall M > 0, \forall \delta > 0 \exists (p, \xi) [d(p) < \delta \wedge |S(p, \xi)| > M]$$

Нехай $\forall M \forall \delta > 0 \exists p \ d(p) < \delta$



Якщо f -необм. на $[a, b]$, то $\exists [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ на якій
 f -необмежена.

Виберемо на відрізку $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ точку ξ_{i_0}
так, щоб

$$|f(\xi_{i_0}) \Delta x_{i_0}| > \left| \sum_{i \neq i_0} f(\xi_i) \Delta x_i \right| + M$$

тоді

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| > M$$

Тому $\lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ не існує.

Теорема доведена.

(4)

Суми Дарбу

Нехай $f(x)$ обмежена на $[a, b]$

P - розбиття $[a, b]$ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Тоді

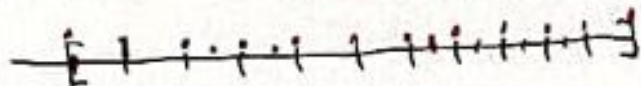
$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$\underline{S}(P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \quad \bar{S}(P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

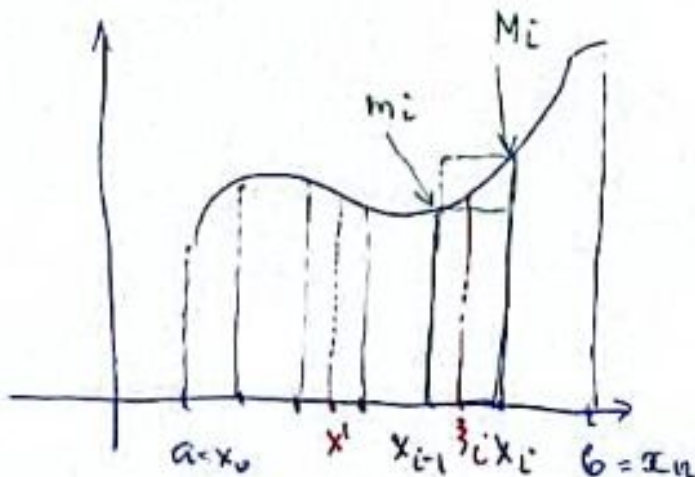
$\underline{S}(P), \bar{S}(P)$ - нижня і верхня суми Дарбу

Означення. Розбиття P_2 подібніше P_1 , якщо $P_1 \subset P_2$



Властивості

1. $\forall (P, \xi) \quad \underline{S}(P) \leq \mathcal{G}(P, \xi) \leq \bar{S}(P)$
2. $\bar{S}(P) = \sup_{\xi} \mathcal{G}(P, \xi), \quad \underline{S}(P) = \inf_{\xi} \mathcal{G}(P, \xi)$
3. $\forall P_1, P_2 \quad P_1 \subset P_2 \quad \bar{S}(P_1) \geq \bar{S}(P_2), \quad \underline{S}(P_1) \leq \underline{S}(P_2)$
4. $\forall P_1, P_2 \quad \underline{S}(P_1) \leq \bar{S}(P_2)$



$$M_i \Delta x_i$$

$$m_i \Delta x_i$$

$$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

6.2.3 Суми Дарбу. Верхній і нижній інтеграл.

Для іншого підходу до поняття інтеграла, а також для формулювання критеріїв інтегрованості функції зручними є поняття сум Дарбу.

Нехай функція f - визначена і обмежена на $[a, b]$. Для довільного розбиття $p(x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b)$ позначимо:

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x), 1 = 1, 2, \dots, n.$$

$$\overline{S}(p) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \underline{S}(p) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

$\overline{S}(p)$, $\underline{S}(p)$ називаються, відповідно, верхньою та нижньою сумами Дарбу.

Нагадаємо, що під розбиттям розуміємо множину точок $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, де $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$.

Означення 6.2.5 Розбиття p_2 називається подрібненим розбиттям p_1 , якщо $p_1 \subset p_2$.

Властивості сум Дарбу

1. $\forall (p, \xi) \quad \underline{S}(p) \leq \sigma(p, \xi) \leq \overline{S}(p)$.
2. $\overline{S}(p) = \sup_{\xi} \sigma(p, \xi), \underline{S}(p) = \inf_{\xi} \sigma(p, \xi)$
3. $\forall p_1, p_2, (p_1 \subset p_2) \overline{S}(p_1) \geq \overline{S}(p_2), \underline{S}(p_1) \leq \underline{S}(p_2)$
4. $\forall p_1, p_2 \underline{S}(p_1) \overline{S}(p_2)$

Доведення.

1. Для $\forall i = 1, 2, \dots, n \quad \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \quad m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$. Домножимо нерівності на Δx_i і підсумуємо. Отримаємо $\underline{S}(p) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum f(\xi_i) \Delta x_i = \sigma(p, \xi) \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \overline{S}(p)$.

2.

$$\sup_{\xi} \sigma(p, \xi) = \sup_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i =$$

враховуючи, що значення $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ змінюється на своїх відрізках незалежно одне від одного, можемо продовжити

$$= \sum_{i=1}^n \sup_{\xi_i} f(\xi_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \overline{S}(p)$$

3. Розглянемо випадок, коли розбиття p_2 має на одну точку більше ніж p_1

$$p_1 : a_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$p_2 : a_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{i_0-1} < x' < x_{i_0+1} < \dots < x_n = b$$

Тоді суми $\overline{S}(p_1)$ і $\overline{S}(p_2)$ відрізняються доданками, які відповідають відрізкам $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, $[x_{i_0-1}, x']$, $[x', x_{i_0}]$. Зауважимо, що $M'_{i_0} = \sup_{x \in [x_{i_0-1}, x']} f(x) \leq M_{i_0} = \sup_{x \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]} f(x)$, аналогічно $M''_{i_0} = \sup_{x \in [x', x_{i_0}]} f(x) \leq M_{i_0}$. Тоді $M'_{i_0}(x' - x_{i_0-1}) + M''_{i_0}(x_{i_0} - x') \leq M_{i_0}(x' - x_{i_0-1} + x_{i_0} - x') = M_{i_0}(x_{i_0} - x_{i_0-1})$ Звідси отримаємо нерівність

$$\overline{S}(p_2) \leq \overline{S}(p_1)$$

Якщо розбиття p_2 отримується додаванням m точок до розбиття p_1 , доведення проводиться застосуванням m разів доведеної вже властивості.

4. Нехай p_1, p_2 довільні розбиття відрізка $[a, b]$. Розглянемо їх об'єднання $p = p_1 \cup p_2$. Використовуючи доведені властивості 1 і 3 отримуємо

$$\underline{S}(p_1) \leq \underline{S}(p) \leq \overline{S}(p) \leq \overline{S}(p_2)$$

Верхній і нижній інтеграли

Нехай $f(x)$ визначена і обмежена на $[a, b]$
З властивостей сум Дарбу маємо, що

$$\forall p_1 \forall p_2 \quad \underline{S}(p_1) \leq \bar{S}(p_2)$$

При фіксованому $p_2 \quad \forall p_1 \quad \underline{S}(p_1) \leq \bar{S}(p_2)$

$$\text{Тому } \exists \sup_{p_1} \underline{S}(p_1) = \underline{I} \leq \bar{S}(p_2)$$

Налі враховуючи, що p_2 довільне

$$\forall p_2 \quad \underline{I} \leq \bar{S}(p_2) \Rightarrow \exists \inf_{p_2} \bar{S}(p_2) = \bar{I}$$

$$\text{і } \underline{I} \leq \bar{I}$$

Отримали, що

$$\forall p_1, p_2 \quad \underline{S}(p_1) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{S}(p_2) \quad !$$

$\underline{I}, \bar{I}$ - верхн. і нижн. інтеграли

Для обмеж. ф-ції вони завжди існують і $\underline{I} \leq \bar{I}$

Приклад. Розглянемо ф-цію Дірікле

$$D(x) = \begin{cases} 0 & x - \text{іраціон.} \\ 1 & x - \text{раціон.} \end{cases}$$

$$[a, b] = [0, 1]$$

$$\underline{S}(p) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \Delta x_i = 0$$

$$\bar{S}(p) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \Delta x_i = 1$$



$$\underline{I} = 0 < \bar{I} = 1$$

$$\sum_{i=1}^n D(\xi_i) \Delta x_i = ?$$

Критерії інтегрованості функції

(2)

Теорема. Нехай f - визначена і обмежена на $[a, b]$.
Наступні твердження є еквівалентні:

1°. $\underline{I} = \bar{I}$

2°. $\forall \varepsilon > 0 \exists \rho \mid \bar{S}(\rho) - \underline{S}(\rho) < \varepsilon$

3°. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \rho \mid \rho(\rho) < \delta \Rightarrow \bar{S}(\rho) - \underline{S}(\rho) < \varepsilon$

4°. $\exists \int_a^b f(x) dx = I; \quad I = \underline{I} = \bar{I}$

Доведення. (В тексті лекції доведено $1^\circ \Rightarrow 2^\circ \wedge 2^\circ \Rightarrow 1^\circ$
 $\wedge 2^\circ \Rightarrow 3^\circ \wedge 3^\circ \Rightarrow 2^\circ \wedge 3^\circ \Rightarrow 4^\circ \wedge 4^\circ \Rightarrow 3^\circ$, тобто
 $1^\circ \Leftrightarrow 2^\circ \Leftrightarrow 3^\circ \Leftrightarrow 4^\circ$)

Ми обмежилися доведенням $3^\circ \Leftrightarrow 4^\circ$, тобто
одним критерієм інтегрованості функції.

Розпишемо, що означає $\exists \int_a^b f(x) dx = I \stackrel{\text{def}}{=}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (\rho, \xi) \mid \rho(\rho) < \delta \Rightarrow |I - G(\rho, \xi)| < \varepsilon$$

Доведення $3^\circ \Rightarrow 4^\circ$.

$$3^\circ = \forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall (\rho, \xi) \mid \rho(\rho) < \delta \Rightarrow |\bar{S}(\rho) - \underline{S}(\rho)| < \varepsilon$$

Відома, що $\underline{S}(\rho) \leq \underline{I} < \bar{I} \leq \bar{S}(\rho)$

Тепер маємо:

$$|I - G(\rho, \xi)| < \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{S}(\rho) \leq I \leq \bar{S}(\rho) \\ \underline{S}(\rho) \leq G(\rho, \xi) \leq \bar{S}(\rho) \end{cases} \Leftrightarrow \underline{I} = \bar{I} = I \text{ - так познач.}$$

$\Downarrow$
4°

$\Downarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (\rho, \xi) \mid \rho(\rho) < \delta \Rightarrow |I - G(\rho, \xi)| < \varepsilon$$

Доведення $4^\circ \Rightarrow 3^\circ$

(3)

$$4^\circ = \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall (p, \xi) [d(p) < \delta \Rightarrow |I - G(p, \xi)| < \varepsilon]$$

$$\forall \xi \quad I - \varepsilon < G(p, \xi) < I + \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$I - \varepsilon \leq \sup_{\xi} G(p, \xi) = \bar{S}(p) \leq I + \varepsilon$$

$$I - \varepsilon \leq \inf_{\xi} G(p, \xi) = \underline{S}(p) \leq I + \varepsilon$$

$$\bar{S}(p) - \underline{S}(p) < 2\varepsilon$$

Отримали 3°

Класи інтегрованих функцій

Теорема. Якщо функція $f(x)$ - неперервна на $[a, b]$,
то вона інтегрована на $[a, b]$

Доведення. Покажемо що виконується критерій 3° .

Якщо f - неперервна на $[a, b]$, то вона рівномірно
неперервна. Тоді для $\forall \varepsilon > 0$ візьмемо $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{b-a}$

$$f \text{ - рівн. непер. } [a, b] \Rightarrow \varepsilon_1 > 0 \exists \delta > 0 \forall x', x'' [|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon_1]$$

Візьмемо розбиття p $d(p) < \delta$. Тоді:

$$\begin{aligned} \bar{S}(p) - \underline{S}(p) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n |f(\xi'_i) - f(\xi''_i)| \Delta x_i = \\ &\leq \sum_{i=1}^n \varepsilon_1 \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

Отримали

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall p [d(p) < \delta \Rightarrow |\bar{S}(p) - \underline{S}(p)| < \varepsilon]$$

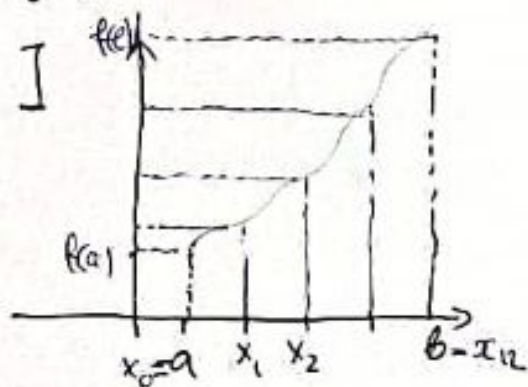
Теорему доведено

Теорема. Якщо функція $f(x)$ визначена і монотонна на $[a, b]$, то вона інтегровна на $[a, b]$

Доведення. Покажемо виконання критерію 3°.

$$\text{Для } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \quad \forall \rho$$

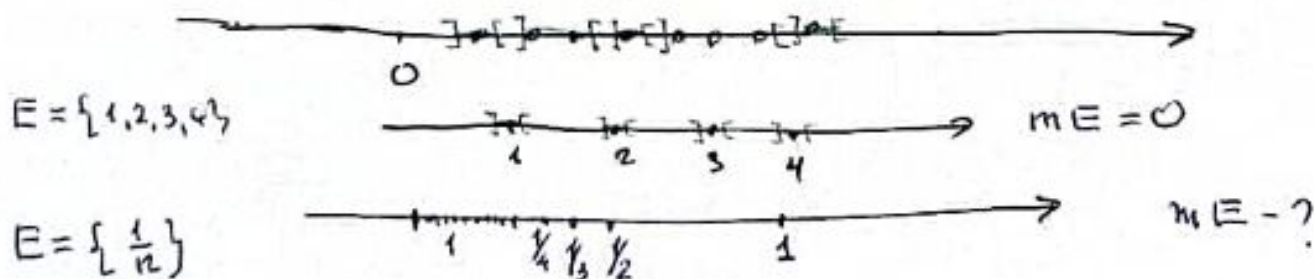
$$\begin{aligned} [d(\rho) < \delta \Rightarrow \bar{S}(\rho) - \underline{S}(\rho) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i = \\ &= \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \\ &= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} (f(b) - f(a)) = \varepsilon \end{aligned}$$



Множини міри нуль
за Жорданом і за Лебегом

Означ. Множина $E \subset \mathbb{R}^1$

$$mE = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \left\{ [a_i, b_i] \right\}_{i=1}^n \left[\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i] \supset E \wedge \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \varepsilon \right]$$



Означ.

$$\mu E = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \left\{ [a_i, b_i] \right\}_{i=1}^{\infty \vee n} \left[\bigcup_{i=1}^{\infty \vee n} [a_i, b_i] \supset E \wedge \sum_{i=1}^{\infty \vee n} (b_i - a_i) < \varepsilon \right]$$

$$mE = 0 \Rightarrow \mu E = 0 \quad mQ = ? \quad \mu Q = ?$$

Властивості інтегрованих функцій

$\mathcal{R}[a,b]$ - множина функцій інтегрованих за Ріманом

Теорема.

$$f, g \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f+g = F \\ \alpha f \\ f \cdot g \\ f/g \quad (\forall x \in [a,b] \quad |g(x)| \neq 0) \\ |f| \\ f|_{[c,d]} \quad [c,d] \subset [a,b] \end{array} \right. \in \mathcal{R}[a,b]$$

Доведення проведемо для випадку суми функцій.
Нехай функції f і g виконують критерій 3° інтегрованості. Покажемо, що 3° виконується і для функції $F = f+g$

$$3^\circ \Rightarrow f\text{-інт.} = \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall P [d(P) < \delta_1 \Rightarrow |S(f,P) - s(f,P)| < \varepsilon]$$

$$3^\circ \Rightarrow g\text{-інт.} = \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 \forall P [d(P) < \delta_2 \Rightarrow |S(g,P) - s(g,P)| < \varepsilon]$$

ε_1 і ε_2 узявши менше,

Позначимо: $M_i(f) - m_i(f) = \omega_i(f)$, $M_i(g) - m_i(g) = \omega_i(g)$

$$K = \sup_x |f(x)|, \quad L = \sup_x |g(x)|$$

$$\omega_i(F) = M_i(F) - m_i(F) = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |F(x') - F(x'')| =$$

$$= \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x') \cdot g(x') - f(x'') \cdot g(x'')| = \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} |f(x')g(x') - f(x')g(x'') + f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')|$$

$$+ |f(x')g(x'') - f(x'')g(x'')| \leq \sup_{x', x'' \in [x_{i-1}, x_i]} (|f(x')| |g(x') - g(x'')| +$$

$$+ |g(x'')| |f(x') - f(x'')|) \leq \dots \leq K \omega_i(g) + L \omega_i(f)$$

Маємо $\omega_i(F) \leq K \omega_i(g) + L \omega_i(f)$

Тому

$$\begin{aligned}\bar{S}(F, P) - \underline{S}(F, P) &= \sum_{i=1}^n [M_i(F, P) - m_i(F)] \Delta x_i = \sum_{i=1}^n \omega_i(F) \Delta x_i \leq \\ &\leq K \sum_{i=1}^n \omega_i(f) \Delta x_i + L \sum_{i=1}^n \omega_i(g) \Delta x_i.\end{aligned}$$

З інтегруваності f, g (3°) $\forall \varepsilon > 0$ вибраним

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2K}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2L} \quad \exists \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} \quad \forall P$$

$$d(P) < \delta \Rightarrow \bar{S}(F, P) - \underline{S}(F, P) < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon$$

Для функції $F = f \cdot g$ виконується критерій 3° !

Для інших випадків доведення аналогічне.

Властивості інтеграла Ріманна

Теорема (лінійність інтеграла)

Якщо f, g - інтегровні, то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha f + \beta g$ - інтегр. і

$$\int_a^b [\alpha f + \beta g](x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Довод. Для $\forall (P, \xi)$ розглянемо інтегр. суми. Тоді

$$\sum_{i=1}^n [\alpha f + \beta g](\xi_i) \Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \Delta x_i$$

Якби перейти до границі отримаємо твердження теорем. В теоремі мова йде про лінійність функціоналу

$$F(f) = \int_a^b f(x) dx$$

$$F(\alpha f + \beta g) = \alpha F(f) + \beta F(g)$$

Теорема (адитивність інтеграла)

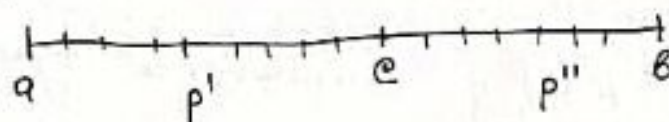
Нехай f - інтер. на $[a, b]$ і $a < c < b$, тоді f інтер. на $[a, c]$ і $[c, b]$, і

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Довед. Розглянемо (p, ξ) і $p \ni c$. Тоді

$$\sigma(f, (p, \xi)) = \sigma(f, (p', \xi')) + \sigma(f, (p'', \xi''))$$

де p', p'' - розділи $[a, c]$, $[c, b]$.



$$d(p) \geq d(p'), d(p) \geq d(p'') \quad d(p) \rightarrow 0 \Rightarrow d(p') \rightarrow 0 \vee d(p'') \rightarrow 0$$

При переході $d(p) \rightarrow 0$ отримують необхідне твердження.

Означення. $a > b$ $\left\{ \begin{array}{l} \int_b^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} - \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} 0 \end{array} \right\} \Delta x_i - \text{знак}$

Теорема. Нехай $a, b, c \in \mathbb{R}$ і f інтер. в кожн. з відрізку.

Тоді
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Довед. Нехай $b < a < c$. Тоді

$$\int_b^c f(x) dx = \int_b^a f(x) dx + \int_a^c f(x) dx \Rightarrow \int_b^a f(x) dx = \int_b^c f(x) dx - \int_a^c f(x) dx$$

$$\Rightarrow - \int_a^b f(x) dx = \int_a^c - \int_b^c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^c + \int_c^b f(x) dx$$

$$F([a, b]) = \int_a^b f(x) dx, \quad F([a, b]) = F([a, c]) + F([c, b])$$

Теорема. Якщо $a \leq b$, f -інтегр. на $[a, b]$, то
 $|f|$ інтегр. на $[a, b]$ і

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq C(b-a)$$

$$C = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Дов. $\forall (P, \xi) \quad \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i)| \Delta x_i \leq C \sum_{i=1}^n \Delta x_i = C(b-a)$

При $d(P) \rightarrow 0$ отримаємо бажане рівняння теорем.

Теорема. Якщо $a < b$ і $\forall x \in [a, b] \quad [f_1(x) \leq f_2(x)]$, то:

$$\int_a^b f_1(x) dx \leq \int_a^b f_2(x) dx$$

Дов. (див. також лекції)

Теорема. Нехай f, g -інт. на $[a, b]$ і $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$
 $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ і $\forall x \in [a, b] \quad [g(x) \geq 0] \vee \forall x \in [a, b] \quad [g(x) \leq 0]$

Тоді:

$$\exists \mu \in [m, M] \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

Довед. Нехай $g(x) \geq 0$. Тоді:

$$m g(x) \leq f(x)g(x) \leq M g(x)$$
$$\Rightarrow m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M$$

$\mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx \quad \left| \begin{array}{l} f\text{-непер.} \Rightarrow \exists \xi \in [a, b] \\ \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \end{array} \right.$$

Інтеграл зі змінною верхньою межею. Формула Ньютона - Лейбніца

Нехай f - інтегрована на $[a, b]$, тобто $f \in \mathcal{R}[a, b]$
Розглянемо функцію

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t) dt \quad x \in [a, b]$$

Функцію $F(x)$ називають інтегралом зі змін. верх. межею

Теорема. Якщо $f \in \mathcal{R}[a, b]$, то $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна на $[a, b]$.

Доведення.

Якщо f - інтегр. на $[a, b] \Rightarrow f$ - обмеж. на $[a, b] \Rightarrow$
 $\exists \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| = C \Rightarrow \forall x \in [a, b] [|f(x)| \leq C]$

$$\begin{aligned} \text{Нехай } x, x+h \in [a, b] \\ |F(x+h) - F(x)| &= \left| \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \left| \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq C h \end{aligned}$$

З нерівності $|F(x+h) - F(x)| \leq C h$ випливає непер. $F(x)$.

Теорема. Якщо $f \in \mathcal{R}[a, b]$ і f неперервна в т. $x \in [a, b]$,
то

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Доведення.

Розглянемо різницю

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - f(x) \right| =$$

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)] dt \right| \leq \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \right|$$

з означення неперервності f в точці x

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t \in [a, b] [|x-t| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon]$$

Тому при $|h| < \delta \Rightarrow t \in [x, x+h] \wedge |t-x| < \delta$ і

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leq \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \varepsilon dt \right| = \varepsilon \frac{1}{h} \cdot h = \varepsilon$$

Звідси

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$$

Теорема. Нехай f - неперервна на $[a, b]$, тоді
 $\exists F(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad F'(x) = f(x)$

Доведення.

f -непер. на $[a, b] \Rightarrow f$ -інтегр. на $[a, b] \Rightarrow \exists F(x) = \int_a^x f(t) dt$
 $\wedge F'(x) = f(x)$ (див. доведення теореми)

Наслідок. Для $\forall f$ -непер $\exists$ первісна F -ї

Цією первісною може бути $F(x) = \int_a^x f(t) dt$

Теорема. Нехай $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ обмежена і неперер. за виключеними синг. множинами тоді
 для f існує узагальн. первісна.

Довед. Цією узаг. первісною може бути $F(x) = \int_a^x f(t) dt$
 (довед. див. у конспекті)

Теорема. Нехай f - неперервна на $[a, b]$, тоді

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

де $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ довільна, первісна функції f на $[a, b]$

Доведення. Нехай $F(x)$ довільна первісна f на $[a, b]$,

а
$$F(x) = \int_a^x f(x) dx$$
 згідно попередньої теореми

також є первісною для f .

Відома, що ці первісні відрізняються ко. сталою

Тому
$$F(x) = \mathcal{F}(x) + C = \int_a^x f(x) dx + C$$

Покладемо $x = a$, отримаємо

$$F(a) = \int_a^a f(x) dx + C = C \Rightarrow C = F(a)$$

Отже

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx + F(a)$$

Тому
$$\forall x \in [a, b] \quad \int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a)$$

При $x = b$ будемо мати

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Формула
Ньютона-Лейбніца

Має місце і узагальнена теорема

Теорема. Якщо f - обмежена і неперервна на $[a, b]$, за викл. скінченної множини точок, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ - довільна узагальн. первісна f на $[a, b]$
(див. див. коментар).

Інтегрування частинами.

Формула Тейлора

Теорема. Нехай функції $u(x)$, $v(x)$, $u'(x)$, $v'(x)$ - неперервні на $[a, b]$. Тоді

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

Доведення.

$$d(u(x) v(x)) = (u(x) v(x))' dx = u'(x) v(x) dx + u(x) v'(x) dx$$

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx + \int_a^b u'(x) v(x) dx = \int_a^b (u(x) v(x))' dx \stackrel{\text{за формулою Н-Л}}{=} u(x) v(x) \Big|_a^b$$

Звідси

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

$$\int_a^b u dv = u v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Використаємо інтегр. частинками для отримання формули Тейлора

Нехай функція в $U(a)$ має непер. похідні до $n+1$ порядку.

$x \in U(a)$

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt = - \int_a^x f'(t) d(x-t) =$$

$$= - f'(t) (x-t) \Big|_a^x + \int_a^x f''(t) (x-t) dt = f'(a) (x-a) - \frac{1}{2} \int_a^x f''(t) d(x-t)^2 =$$

$$= f'(a) (x-a) - \frac{1}{2} f''(a) (x-a)^2 + \frac{1}{2} \int_a^x f'''(t) (x-t)^2 dt =$$

$$= f'(a) (x-a) + \frac{1}{2} f''(a) (x-a)^2 - \frac{1}{2 \cdot 3} \int_a^x f'''(t) d(x-t)^3 = \dots$$

$$= \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt$$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt \stackrel{= R_n(x)}{=}$$

$$\boxed{R_n(x)} = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \int_a^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

Заміна змінних у визначеному інтегралі

5

Теорема. Нехай $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна на $[a, b]$ і відображення $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ - неперервне і має $\varphi'(t)$ - непер. на $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

Тоді
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Довед. Нехай $F(x)$ - первісна f іє для f , тоді $F(\varphi(t))$ - буде первісна для $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$.

Дійсно $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$

Згідно формули Н-А

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

Тому
$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Приклад 1
$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt =$$

$x = \varphi(t) = a \sin t$

$\varphi: [0, \pi/2] \rightarrow [0, a]$

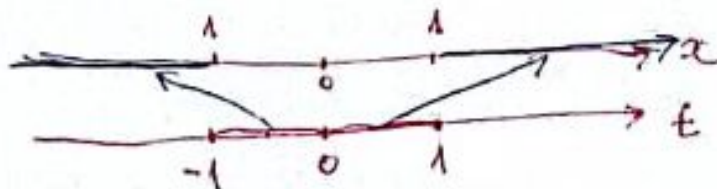
$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}$$

Приклад 2
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = a \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^1 = a \operatorname{arctg} 1 - a \operatorname{arctg} (-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = - \int_{-1}^1 \frac{d(\frac{1}{x})}{1+(\frac{1}{x})^2} = - \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = -a \operatorname{arctg} t \Big|_{-1}^1 = -\frac{\pi}{2}$$

$x = \varphi(t) = \frac{1}{t}$
 $t = \frac{1}{x}$



Застосування визначеного інтеграла.

Поняття про міру множини.
[міра - довжина, площа, об'єм]

Сформулюємо задачу знаходження міри. Ми хочемо кожній множині E поставити у відповідність деяке число $m E \in \mathbb{R}$:
 $E \rightarrow m E \in \mathbb{R}$, вимагати певні властивості:

1° $m E \geq 0$.

2° $m(E_1 \cup E_2) = m E_1 + m E_2$ ($E_1 \cap E_2 = \emptyset$) - адитивність.

3° $E_1 \cong E_2 \rightarrow m E_1 = m E_2$
(E_1 і E_2 - конгруентні - || переносом; поворотом їх можна співставити)

4° $m e = 1$

Чи ця задача має розв'язок?

Виявляється, що в $\mathbb{R}^1$ і $\mathbb{R}^2$ ця задача має розв'язки (Банах), в $\mathbb{R}^3$ - ні (Хансдорф, Банах, Тарський).



$a = m \in \mathbb{Z}$ $b = n \in \mathbb{Z}$ $S = m \cdot n = a \cdot b$. (Розв'язаннями $a, b \in \mathbb{Q}$; $a, b \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$)

міра Жордана.

Розшидити міру множини $E \subset \mathbb{R}^2$,
 $E \subset \mathbb{R}^3$

Озн. 1 Около точки $(x_0, y_0) \in$ множини $\{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\} = U_\delta(x_0, y_0)$

Озн. 2. Точка M зветься внутрішньою

точкою множини E , якщо $\exists U(M) :$
 $U(M) \subset E$

Озн. 3 Точка M зветься граничною точкою множини E , якщо $\forall \varepsilon$
 $U_\varepsilon(M) \cap E \neq \emptyset$. $\bar{U}_\varepsilon(M) = U_\varepsilon(M) \setminus \{M\}$

Озн. 4 $\bar{E} = E \cup E'$, де E' - множина граничних точок

Озн. 5 M зветься точкою межі множини E , якщо $\forall \varepsilon$ $U_\varepsilon(M) \cap E \neq \emptyset$
 $U_\varepsilon(M) \cap C E \neq \emptyset$ ($C E$ - доповнення до E)

Нехай $E \subset \mathbb{R}^2$. P, Q - множини в $\mathbb{R}^2$. Усі такі mP, mQ - відносно mP задовільні властивості 1), 2), 3), 4).



$$m^* E \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{Q \supset E} \{mQ\}$$

$$m_* E \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{P \subset E} \{mP\}$$

E - обмежена $\rightarrow \{mQ\}$ і $\{mP\}$ обмежені зверху і знизу відповідно.
Фіоді $m^* E$ - вершина міра Мордана
 $m_* E$ - нижня міра Мордана.

Озн. Множина E зветься відрізком, якщо
 $m^* E = m_* E = mE$, де mE - міра Мордана.

Р Позначення: $\bar{P}$ - множина внутр. точок
 $-$ замикання множини.
 $m\bar{P} = mP$

Множину розбити на скінз. к-ть множин, кожну з яких можна покрити скінз. к-ть трикутників такою або

Без межі)
 $E \subset \mathbb{R}^2$



$$\sup_{P \subset E} \{m P\} = m_* E$$

$$\inf_{P \supset E} \{m P\} = m^* E.$$

Властивості $m E$ за Жорданом

1° E - вимірна $\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P, Q$ - многокутники
 $P \subset E, Q \supset E, m Q - m P < \varepsilon$.

► $\Rightarrow E$ - вимірна $\rightarrow m_* E = m^* E = m E$

Додає за означ. $\sup$ і $\inf$, $\forall \varepsilon > 0 \exists P : m^* E - \frac{\varepsilon}{2} < m P < m^* E + \frac{\varepsilon}{2}$
 $\rightarrow m Q - m P < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

◀ Нехай $\forall \varepsilon > 0 \exists P, Q : m Q - m P < \varepsilon$.

Відома, що $\forall P, Q : P \subset E \subset Q$
 $m P \leq m_* E \leq m^* E \leq m Q$, отже, якщо
 виконуються умови, то $m^* E - m_* E < \varepsilon \rightarrow$
 $\rightarrow m^* E = m_* E$. ◀

2° E - вимірна $\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists E_1, E_2$ - вимірні,
 $E_1 \subset E \subset E_2, m E_2 - m E_1 < \varepsilon$.

► $\Rightarrow$ Очевидно, бо P, Q - вимірні. За-
 стосуємо властивість 1°.

◀



$\forall \varepsilon$.
 E_1 - вимірна $\rightarrow \exists P : m_* E_1 - \frac{\varepsilon}{2} < m P$
 E_2 - вимірна $\rightarrow \exists Q : m^* E_2 + \frac{\varepsilon}{2} > m Q$

$$\rightarrow m^* E_2 - m_* E_1 + \varepsilon > m Q - m P \rightarrow$$

$$\rightarrow m Q - m P \geq m^* E_2 - m_* E_2 + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Отже $\forall \varepsilon > 0 \exists P, Q : Q \supset E \supset P$
 $m Q - m P < 2\varepsilon \rightarrow$ вимірна

конечность 1°. $\rightarrow E$ вымерна. $\blacktriangle$

3°. E - вымерна $\leftrightarrow m\partial E = 0$.

∂E - множина точок меж E .

► $\Rightarrow E$ - вымерна. $\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists R, Q$ - многоугольники: $R \subset E \subset Q$, $mQ - mR < \varepsilon$.
Возьмем $Q \sim \bar{Q}$: $R \sim \bar{R}$, $Q \sim \bar{Q}$ а заменим

Тогда $Q \setminus R \supset \partial E$ $R \setminus P$ - многоугольники
 $m(Q \setminus R) < \varepsilon$. З цієї
нерівності випливає, що $m\partial E = 0$
(Аналогічно до mE на відрітку -
існує к-ть прямокутників, що
покривають ∂E і $m(Q \setminus R) < \varepsilon \forall \varepsilon$.)

Озн. $E \subset \mathbb{R}^2$, $mE = 0 \stackrel{\text{def}}{=} \forall \varepsilon > 0$
 $\exists R$ - многоугольник: $R \supset E$, $mE < \varepsilon$.

$\Leftarrow m\partial E = 0 \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists R$ - многоугольник:
 $R \supset \partial E$, $mR < \varepsilon$. Нехай $P = E \setminus R$,
 $Q = E \cup R$ Тоді $R \subset E \subset Q$,



$$mQ - mP < \varepsilon.$$

Отже, $\exists R, Q: R \subset E \subset Q$,
 $mQ - mP < \varepsilon \forall \varepsilon \rightarrow E$ вымерна. $\blacktriangle$

4°. E_1, E_2 - вымерні $\rightarrow E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2$,
 $E_1 \setminus E_2$ - вымерні.

► Зауважимо, що $\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$,
 $\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$, $\partial(E_1 \setminus E_2) \subset$
 $\subset \partial E_1 \cup \partial E_2$.

Якщо E_1 - вимірна $\rightarrow m \partial E_1 = 0$,
 E_2 - вимірна $\rightarrow m \partial E_2 = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow m \partial (E_1 \cup E_2) = 0, \rightarrow m \partial (E_1 \cup E_2) = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow E_1 \cup E_2$ - вимірна. $\blacktriangleleft$

Нехай $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^2$, $m G_1 = 0 = m G_2 \rightarrow m(G_1 \cup G_2) = 0$.

$\forall \varepsilon > 0$:
 $m G_1 = 0 \rightarrow \exists R_1 : R_1 \supset G_1, m R_1 < \varepsilon$.

$m G_2 = 0 \rightarrow \exists R_2 : R_2 \supset G_2, m R_2 < \varepsilon$.

Звідси $R_1 \cup R_2 = R \rightarrow \exists R : R \supset G_1 \cup G_2$,
 $m R < 2\varepsilon$.

5°. E_1, E_2 - вимірні, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Тоді
 $m(E_1 \cup E_2) = m E_1 + m E_2$.



3 вимірності E_1 і E_2 :

$\forall \varepsilon > 0 \exists P_1, Q_1 : P_1 \subset E_1 \subset Q_1$

$m Q_1 - m P_1 < \varepsilon$

$m P_1 \leq m E_1 \leq m Q_1$;

$\exists P_2, Q_2 : P_2 \subset E_2 \subset Q_2 ; m Q_2 - m P_2 < \varepsilon$;
 $m P_2 \leq m E_2 \leq m Q_2$.

Нехай $P = P_1 \cup P_2$, $Q = Q_1 \cup Q_2$

$P \subset E_1 \cup E_2$, $Q \supset E_1 \cup E_2$.

$m P \leq m(E_1 \cup E_2) \leq m Q$.

$m P_1 + m P_2 = m(P_1 \cup P_2) = m P \leq m(E_1 \cup E_2) \leq$

$\leq m Q \leq m Q_1 + m Q_2$.

Або, $(m Q_1 + m Q_2) - (m P_1 + m P_2) < 2\varepsilon$.

Тоді $m P_1 \leq m E_1 \leq m Q_1$ (аналогічно
 для E_2) отже, $m P_1 + m P_2 \leq m E_1 + m E_2 \leq$
 $\leq m Q_1 + m Q_2$.

$$\text{Тоді } m(E_1 \cup E_2) - (mE_1 + mE_2) \leq (mQ_1 + mQ_2) - (mP_1 + mP_2) < 2\varepsilon.$$

Отже, $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$. $\triangleleft$

Тепер введена наша міра задовільняє властивості 1-4 і міру?

1. $mE \geq 0$ - виконується
2. адитивність - доведено
3. рівність для неперекриваних (на основі того, що це викон. для многокутників)
4. $mE = 1$ - те саме,

Отже, введена міра Жордана задовільняє властивості 1-4.

Але не всі множини мають міру. Нехай $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $A \times A = E$.

$$m^*E = \inf_{Q \supset E} \{mQ\} = 1, \quad m_*E = \sup_{P \subset E} \{mP\} = 0 \quad \text{ібо } \nexists \text{ мно-}$$

годунок, вписаних в E . $\square$

Площа криволіній.
кращий

$$f(x) \geq 0 \quad E = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Теорема. Нехай функція $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, f інтегрована на $[a, b]$. Тоді E - вимірною, $mE = \int_a^b f(x) dx$.

► f -інтегр. $\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists p: \bar{S}(p) - \underline{S}(p) < \varepsilon$
 $\bar{S}(p) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ - сума площ прямокутників, або площа многокутника, $\square$ описаного навколо E

$\underline{S}(p) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ - площа многокутника,

Міра $\forall E \subset \mathbb{R}^n$ $m: E \rightarrow mE \in \mathbb{R}$

1°. $mE \geq 0$

2°. $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$ $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

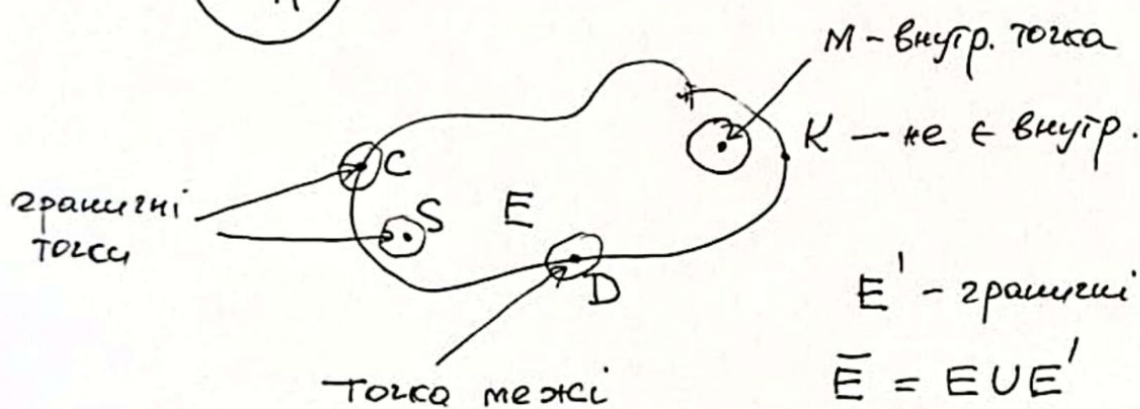
3°. $E_1 \cong E_2 \Rightarrow mE_1 = mE_2$

4°. $m\emptyset = 0$

$\mathbb{R}^2$



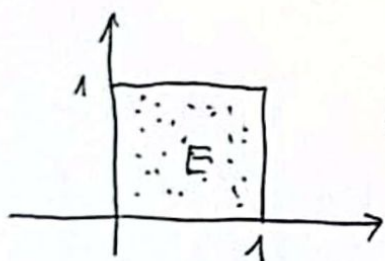
$U_E(M)$ $M(x_0, y_0)$



E' - граничні точки E

$\bar{E} = E \cup E'$

∂E - межа E



$E = \{(x, y) \mid x, y - \text{раціонал.}\}$

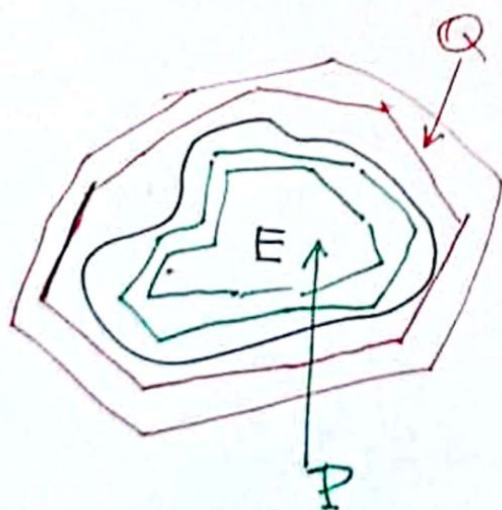
$E' = [0, 1] \times [0, 1]$

$\bar{E} = [0, 1] \times [0, 1]$

$\partial E = [0, 1] \times [0, 1]$

$\overset{\circ}{E}$ - внутр. точки

$\overset{\circ}{E} = \emptyset$



$m^*E \stackrel{\text{def}}{=} \inf \{mQ\}$

$m_*E \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{mP\}$

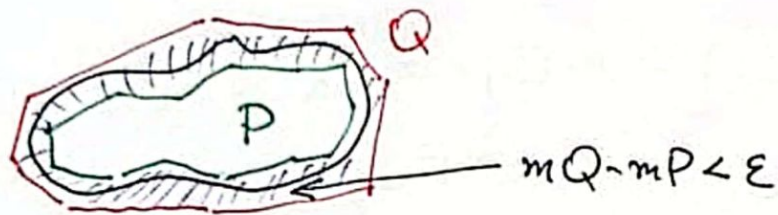
E - вимірює $\stackrel{\text{def}}{=} m_*E = m^*E = mE$

$m\overset{\circ}{P} = m\bar{P}$

$m\overset{\circ}{Q} = m\bar{Q}$

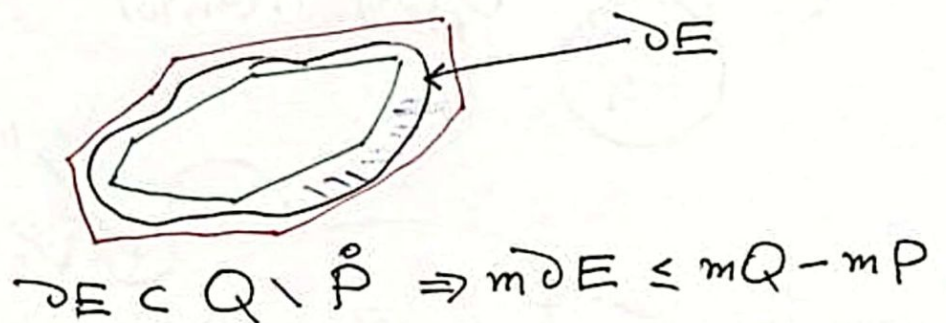
Властивість 1°

E - вимірна $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P, Q$ - мнор. $P \subset E, Q \supset E$
 $[mQ - mP < \varepsilon]$



Властивість 3° E - вимірна $\Leftrightarrow m\partial E = 0$

З вл. 1° $\Rightarrow \exists P, Q$



$$\partial E \subset Q \setminus \overset{\circ}{P} \Rightarrow m\partial E \leq mQ - mP$$

Властивість 4°

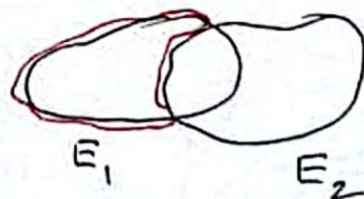
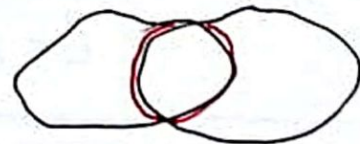
E_1, E_2 - вимірні. $\Rightarrow E_1 \cup E_2, E_1 \cap E_2, E_1 \setminus E_2$ - вимірні.

Ці вимірні є з власт. 3° і властивості межі.

$$\partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$$

$$\partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$$

$$\partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2$$

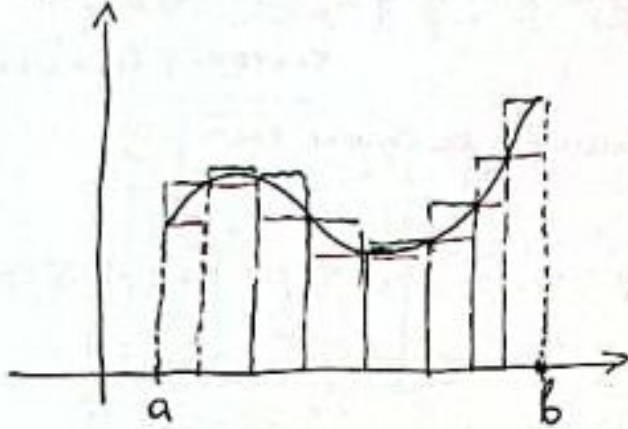


Площа криволінійної Трапеції

$$f(x) \geq 0, E = \{ (x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x) \}$$

Теорема.

$$f \text{ - інтегр. на } [a, b] \Rightarrow E \text{ - вимірна } \wedge mE = \int_a^b f(x) dx$$



$$P \subset E \subset Q$$

P, Q - множини

$$mP = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = \underline{S}(f)$$

$$mQ = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \bar{S}(f)$$

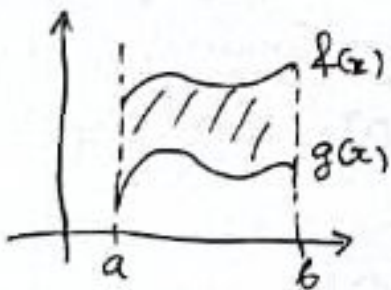
$$f \text{ - інтегр.} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall p [d(p) < \delta \Rightarrow \bar{S}(f) - \underline{S}(f) < \varepsilon] \Rightarrow mQ - mP < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P, Q \text{ - множ. } P \subset E \subset Q [mQ - mP < \varepsilon] \Rightarrow E \text{ - вим.}$$

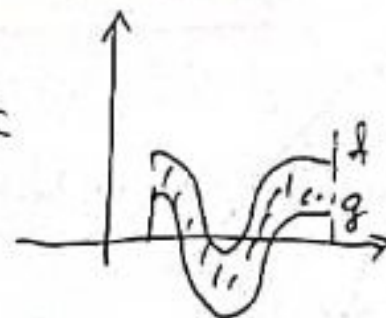
$$mP \leq mE \leq mQ$$

$$\underline{S}(f) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \bar{S}(f)$$

$$\forall \varepsilon mQ - mP < \varepsilon \Rightarrow mE = \int_a^b f(x) dx$$



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Теорема. $z = z(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta, E = \{ (\varphi, z) \mid \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq z \leq z(\varphi) \}$

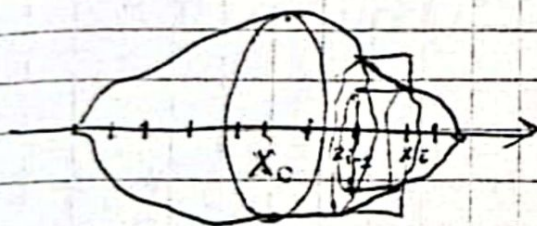
$$z(\varphi) \text{ - інтегр. } [\alpha, \beta] \Rightarrow E \text{ - вимірна } mE = \int_{\alpha}^{\beta} [z(\varphi)]^2 d\varphi$$

Нехай $Q(x)$ - непер.

Теорема. Якщо для множини V , $Q(x)$ - непер. на $[a, b]$, то V - ви-
мірна, $mV = \int_a^b Q(x) dx$.

► $Q(x)$ - непер. $\rightarrow Q$ -інтегрована, $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists p: \sum M_i \Delta x_i - \sum m_i \Delta x_i < \varepsilon$$



M_i - переріз найбільшої
циліндра, m_i - площа най-
меншого перерізу.

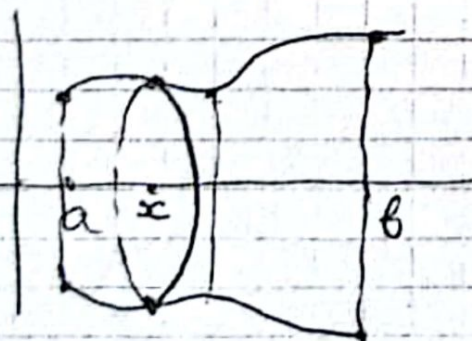
Тоді $\sum M_i \Delta x_i$ - сума об'ємів цилінд-
рів = об'єм ~~об~~ вписаного наваго
~~тїла~~ циліндрів.

$\sum m_i \Delta x_i$ - об'єм вписаних у
циліндрів.

За критерієм вимірності V - ви-
мірна.

$$\left. \begin{aligned} \sum m_i \Delta x_i &\leq mV \leq \sum M_i \Delta x_i \\ S(p) &\leq \int_a^b Q(x) dx \leq \overline{S}(p) \end{aligned} \right\} \rightarrow mV = \int_a^b Q(x) dx. \blacktriangleleft$$

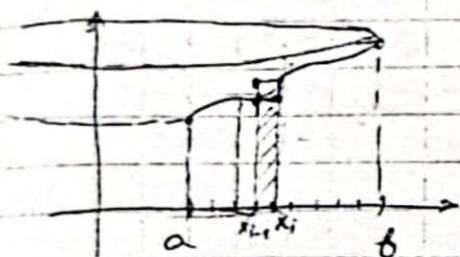
V - тіло обертання



$$Q(x) = [f(x)]^2 \cdot \pi \rightarrow$$

$$\rightarrow V_{0x} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Об'єм обертання навколо вісі Oy
 Розв. $f(x)$ - інтегрована на $[a, b]$, $f(x) \geq 0$



Розв. V - тіло обертання кривої $f(x)$ навколо вісі Oy

Розв. деяке розбиття p $a = x_0 < \dots < x_n = b$.
 Через M_i позначимо $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

Розглянемо об'єм обертання i -тої пішарки:
 $V_i = \pi M_i^2 x_i^2 - \pi M_i x_{i-1}^2 = \pi M_i (x_i^2 - x_{i-1}^2)$ - об'єм обертання i -ого великого круга.
 $v_i = \pi m_i (x_i^2 - x_{i-1}^2)$ - об'єм обер. ~~на~~ вписаної пішарки

Розв. $mQ = \pi \sum_{i=1}^n M_i (x_i^2 - x_{i-1}^2)$, $\pi \sum_{i=1}^n M_i (x_i + x_{i-1}) \Delta x_i$ - об'єм зовнішньої Q , описаної навколо V
 $mP = \pi \sum_{i=1}^n m_i (x_i + x_{i-1}) \Delta x_i$ - об'єм внутрішньої P , вписаної у V .

V - вимірна $\rightarrow$ треба показати, що $mQ - mP < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.

$$mQ - mP = \pi \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) (x_i + x_{i-1}) \Delta x_i \leq 2b \pi \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \varepsilon \cdot 2\pi \cdot b \quad (f - \text{інтегр.})$$

Скорист. критерієм: V - вим. $\leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P, Q \quad P \subset V \subset Q, \quad mQ - mP < \varepsilon$

$$\text{Візьмемо} \quad \xi_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

Розвн. $\delta(p, \xi) = 2\pi \sum f(\xi_i) \cdot \xi_i \Delta x_i$

$mP \leq \delta(p, \xi) \leq mQ$ $\delta(p, \xi)$ - інтегральна сума.

$mP \leq mV \leq mQ$. Звідси отримуючи,

що $\forall \varepsilon > 0 \exists p_0 : |mV - \delta(p, \xi)| < \varepsilon. \rightarrow$

$\rightarrow \lim_{d(p) \rightarrow 0} \delta(p, \xi) = \int_a^b 2\pi f(x) \cdot x dx$, бо $f(x) \cdot x$ -

інтегрована. Тому $mV = 2\pi \int_a^b f(x) x dx$.

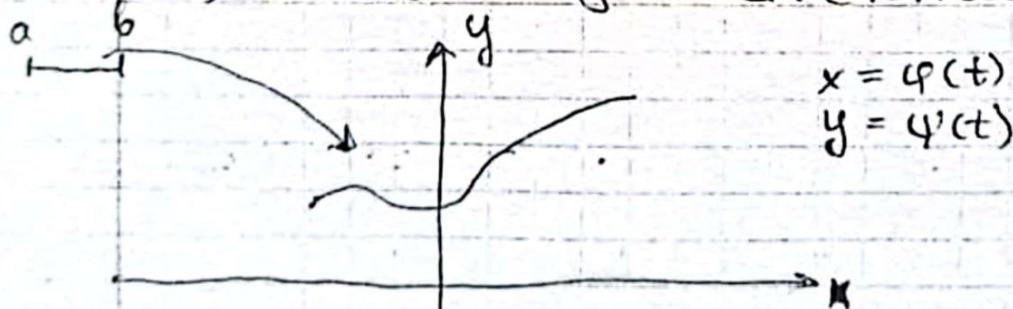
Довшика кривої.

Поняття про криву.

Озн. Параметризованою кривою дугою називається ф-ція $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

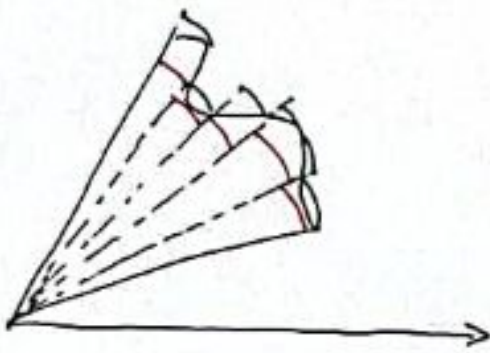
$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$. Якщо φ і ψ - непер., то γ - неперервна, якщо φ, ψ - дифер., то γ - дифер., якщо φ' і ψ' - непер., то γ - неперервно диференційована.

Параметризов. крива зветься простою, якщо γ - ін'єктивна.



Проста крива не має самонахрещень, до різних t відповідають різні точки.

Крива замкнута, якщо $\gamma(a) = \gamma(b)$.



$$P \subset E \subset Q$$

$$mP = \frac{1}{2} \sum m_i^2 \Delta \varphi_i = \underline{S}(P)$$

$$mQ = \frac{1}{2} \sum M_i^2 \Delta \varphi_i = \bar{S}(P)$$

$\frac{1}{2} m_i \Delta \varphi_i, \frac{1}{2} M_i \Delta \varphi_i$ - площі секторів (визн. множени)

P, Q - визн. множени (як суми секторів)

$$Z(\varphi) - \text{інтегр} [a, b] \Rightarrow \frac{1}{2} Z^2(\varphi) - \text{інтегр} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \rho [d(\rho) < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\bar{S}(\rho) - \underline{S}(\rho) < \varepsilon] \Rightarrow mQ - mP < \varepsilon$$

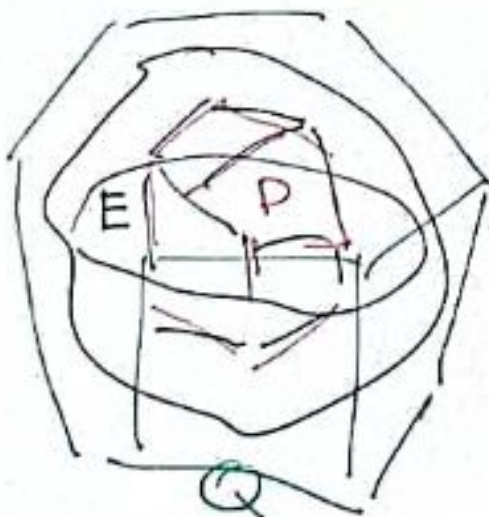
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P, Q - \text{визн. } P \subset E \subset Q [mQ - mP < \varepsilon] \Rightarrow E - \text{визн.}$$

$$mP \leq mE \leq mQ$$

$$\underline{S}(\rho) \leq \frac{1}{2} \int_a^b [f(\varphi)]^2 d\varphi \leq \bar{S}(\rho)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad mQ - mP < \varepsilon \Rightarrow mE = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\varphi) d\varphi$$

Площі об'єму в $\mathbb{R}^3$



$E \subset \mathbb{R}^3, P, Q$ - многогранники

$$m_* E \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{P \subset E} \{mP\} \quad mP - \text{об'єм мнор.}$$

$$m^* E \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{Q \supset E} \{mQ\} \quad mQ - \text{об'єм мнор.}$$

$$E - \text{вимірн.} \stackrel{\text{def}}{=} m_* E = m^* E = mE$$

Обчислення об'єму

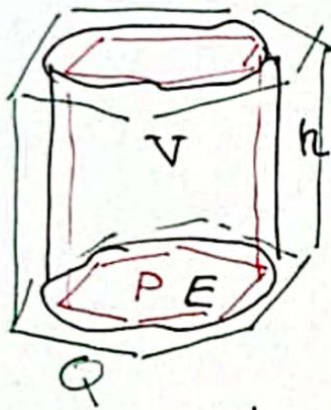
3

V - циліндричне тіло

$$V = \{ (x, y, z) \mid (x, y) \in E, 0 < z < h \}$$

Теорема.

E - вимірне в $\mathbb{R}^2 \Rightarrow V$ - вимірне в $\mathbb{R}^3 \wedge mV = h \cdot mE$



$V_1 \subset V$, V_1 - впис. циліндр.

$V \subset V_2$, V_2 - опис. циліндр.

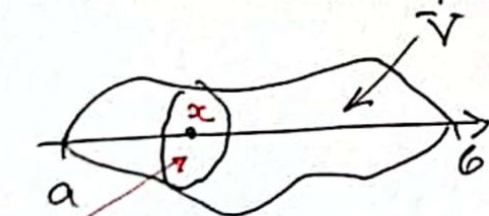
$$mV_1 = h mP$$

$$mV_2 = h mQ$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists V_1, V_2 \quad V_1 \subset V \subset V_2 \quad mV_2 - mV_1 = (mQ - mP)h < \varepsilon$$

$$mV = \sup \{ mV_1 \} = \inf \{ mV_2 \}$$

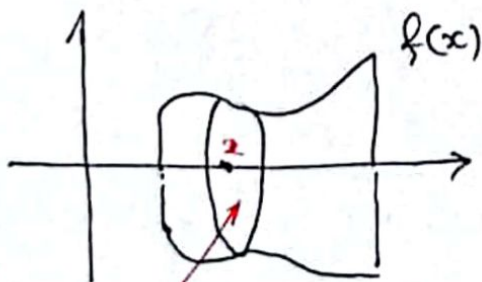
Вираз об'єму через площу поперечного перерізу



$Q(x)$ - площа перерізу

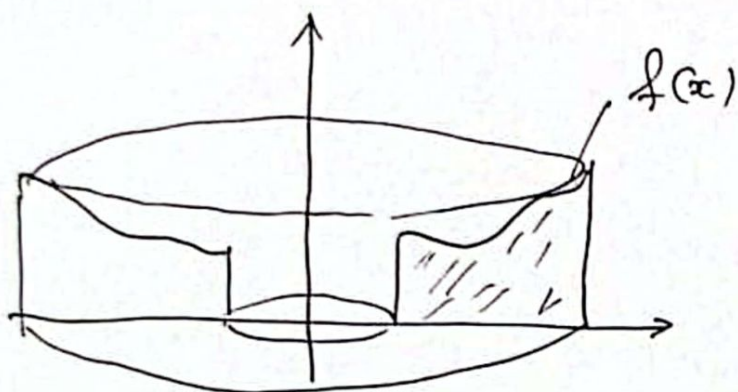
$$mV = \int_a^b Q(x) dx$$

Якщо V тіло обертання



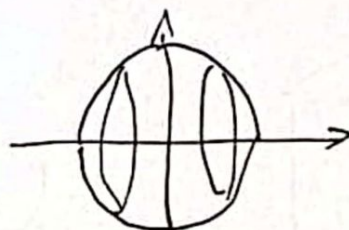
$Q(x) = \pi [f(x)]^2$ - площа круга

$$mV_{ox} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



$$mV_{0y} = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot x dx$$

Πρώτη. Οδός κυλινδρική



$$x^2 + y^2 = a^2$$

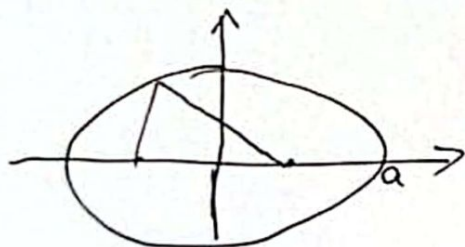
$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$mV_{0x} = \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx =$$

$$= \pi \left(a^2 x \Big|_{-a}^a - \frac{x^3}{3} \Big|_{-a}^a \right) = \pi \left(a^3 + a^3 - \frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{3} \right) = \pi \frac{4a^3}{3}$$

Δεύτερη ελίφα

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$S = 4 \int_0^a \sqrt{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} dx =$$

$$= 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx =$$

$$x = a \sin t$$

$$dx = a \cos t dt$$

$$= 4 \frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} a \cdot a \cos^2 t dt =$$

$$= 4ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt =$$

$$= 2ab \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi ab$$

$$\text{Тоді } m(E_1 \cup E_2) - (mE_1 + mE_2) \leq \\ \leq (mQ_1 + mQ_2) - (mP_1 + mP_2) < 2\varepsilon.$$

Отже, $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$.

Тепер введемо нову міру задовільно властивостями 1-4. Міра?

1. $mE \geq 0$ - виконується
2. адитивність - доведено
3. рівність для неперекриваних (на основі того, що це викон. для многокутників)
4. $mE = 1$ - те саме,

Отже, введена міра Жордана задовільно властивості 1-4.

Але не всі множини мають міру. Нехай $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $A \times A = E$.

$$m^*E = \inf_{Q \supset E} \{mQ\} = 1, \quad m_*E = \sup_{P \subset E} \{mP\} = 0 \quad \text{гдо } \nexists \text{ мн.}$$

зотримків, вписаних в E .

Площа кривої.
нормальні

$$f(x) \geq 0 \quad E = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Теорема. Нехай функція $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$, f інтегрована на $[a, b]$. Тоді E - вимірна, $mE = \int_a^b f(x) dx$.

► f -інтегр. $\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists p: \bar{S}(p) - \underline{S}(p) < \varepsilon$

$$\bar{S}(p) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \text{сума площ прямо-$$

кутників, або площа многокутника, описаного навколо E

$$\underline{S}(p) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i - \text{площа многокутника,}$$

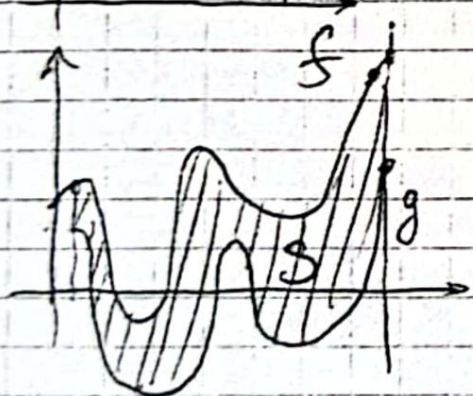
вписанного в E . Отсюда, для $\forall \varepsilon > 0$ найдем ε -описатель $mQ - mP < \varepsilon \rightarrow E$ - вымерна.
 $mE = \sup_Q mQ = \inf_P mP = \sup \bar{S}(P) = \inf \underline{S}(P) =$

$= 1$ - одним из критериев использования $\int_a^b f(x) dx = 1$.

або $mP \leq mE \leq mQ \rightarrow (mQ - mP < \varepsilon) \rightarrow$
 $\underline{S}(P) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \bar{S}(P)$
 $\rightarrow |mE - \int_a^b f(x) dx| < \varepsilon \rightarrow mE = \int_a^b f(x) dx$

Замеч.

$$S = \int_a^b [f(x) + g(x)] dx$$



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Справедли, вычислено

$$f_1(x) = f(x) + C$$

$$g_1(x) = g(x) + C, \text{ так}$$

чтобы и $g_1(x)$ и $f_1(x)$ были

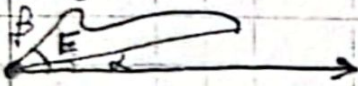
бóльшие

тогда $S = \int_a^b [f_1(x) - g_1(x)] dx$.

Площа криволинейного сектора.

Пусть $r = r(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$

Розв. неможливу $E = \{(\varphi, z) | \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq z \leq z(\varphi)\}$



Теорема. Якщо $z(\varphi)$ - інтегр. на $[\alpha, \beta]$. Тоді $mE = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [z(\varphi)]^2 d\varphi$

► $z(\varphi)$ - інтегр. $\rightarrow \frac{1}{2} [z(\varphi)]^2$ - інтегрована $\rightarrow$
 (за критерієм) $\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists p: \bar{S}(p) - \underline{S}(p) < \varepsilon$
 где $\varphi \in [\alpha, \beta]$ $\frac{1}{2} [z(\varphi)]^2$.

$\bar{S}(p) = \sum \frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$ - сума площ секторів описаних

$\underline{S}(p) = \sum \frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i$ - сума площ секторів вписаних.



$\frac{1}{2} M_i^2 \Delta\varphi_i$ - площа великого сектора
 $\frac{1}{2} m_i^2 \Delta\varphi_i$ - площа маленького сектора.

$\bar{S}(p)$ - площа описаної вимірної мно-
 жини

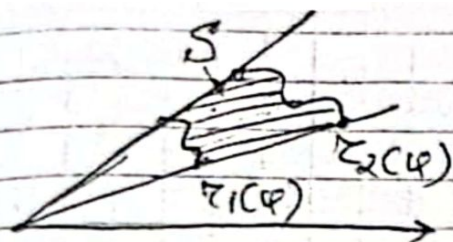
$\underline{S}(p)$ - площа вписаної вимірної мно-
 жини.

Отже, $\forall \varepsilon > 0 \exists E_1, E_2$ - вимірні, що
 $E_1 \subset E \subset E_2$ $mE_2 - mE_1 < \varepsilon$.
 Значу E вимірна

$$mE_1 \leq mE \leq mE_2$$

$$\underline{S}(p) \leq \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [z(\varphi)]^2 d\varphi \leq \bar{S}(p) \rightarrow |mE - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [z(\varphi)]^2 d\varphi| < \varepsilon \rightarrow$$

$$\rightarrow mE = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [z(\varphi)]^2 d\varphi. \blacktriangleleft$$



$$S = \frac{1}{2} \int_a^b [z_2(\varphi)]^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_a^b [z_1(\varphi)]^2 d\varphi$$

Нехай $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a \leq t \leq b$.

$$(\varphi(a), \psi(a)) = (\varphi(b), \psi(b))$$

$$mE = - \int_a^b \psi(t) \varphi'(t) dt \quad (\text{проти}$$

годинник. стрілки, якщо

навіки, то $+$.) - Довести самостійно.

Зад - розбити на 2 куски..

Гіометрія об'єму

Розглянемо в $\mathbb{R}^3$ многогранники P, Q, R ; $E \subset \mathbb{R}^3$.

$$m_* E = \sup_{P \subset E} \{mP\}, \quad m^* E = \inf_{Q \supset E} \{mQ\},$$

E вимірна $\stackrel{\text{def}}{\iff} m_* E = m^* E = mE$.
 Подальші вб - те про вимірні
 множини в $\mathbb{R}^3$ - аналогічні.

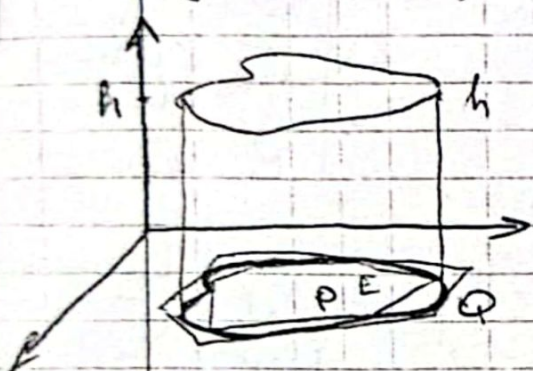
Обчислення об'єму.

1.0 Нехай $E \in \mathbb{R}^2$, $V = \{(x, y, z) | (x, y) \in E, 0 \leq z \leq h\}$

V - циліндричне тіло

Теорема. E - вимірна в $\mathbb{R}^2 \rightarrow$
 $\rightarrow V$ - вимірна в $\mathbb{R}^3$, $mV = h \cdot mE$.

► E - вимірює $\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists P, Q$ - мно-
жотини, $P \subset E \subset Q$ і $m Q - m P < \varepsilon$.



Розв'я. V_1 - призма з ос-
новною P і висотою h ,
 V_2 - призма з основою
 Q і висотою h .

Тоді V_1 - многогран-
ник, вписаний у V .
Тоді V_2 - многогранник, описаний навколо V .

$$\begin{aligned} \text{Тоді } m V_1 &= h \cdot m P, \quad m V_2 = h \cdot m Q. \\ m V_2 - m V_1 &= h m Q - h m P = h(m Q - m P) < h \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже, $\forall \varepsilon > 0 \exists V_1, V_2$ - многогран-
ники: $V_1 \subset V \subset V_2$, $m V_2 - m V_1 < h \varepsilon$.
Це критерій вимірює.

$$m V = \sup m V_1 = \inf m V_2 = h \cdot m E \quad \blacktriangleleft$$

2.° Вираж. Об'єму через площу попе-
рекного перерізу.

$$V \subset \mathbb{R}^3$$



$Q(x_0)$ - площа перерізу
 V площинною $x = x_0$

Структурення: припуска-
ємо, що проєкції на
перерізів тіла $\in \mathbb{R}$ на мно-
жину Ox - компактні

Темами лекції будуть:

Поняття про криву

Пов'язана з кривою

Площа поверхні одертання

Спогадку розглянемо основні означення.

Поняття про криву. Пов'язана з кривою.

При одержанні поняття кривої виникає питання:

Що ми розуміємо під кривою - той геометричний слід (мислення), чи вираження (функція, рівняння). Виявляється, що "різні" вираження (різні функції) можуть мати той самий слід (траєкторія). Це важливо в геометрії.

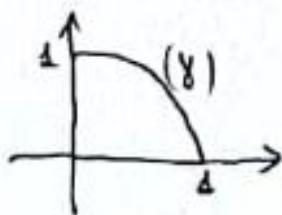
Ми старалися показати: як одержати всі вираження, які мають одинковий слід (траєкторія). І тоді під кривою розуміємо клас всіх виражень з одинковим слідом.

Цей шлях веде через поняття: параметризація кривої, відношення еківалентності, клас еквівалентних параметризованих кривих, крива.

В повільному в контексті прикладі параметризовані криві $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ мають один слід (траєкторія),

і вони є різними параметризаціями однієї кривої (γ)

[це так само як число 0,5 має різні вираження $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$, і т.д.]



Дані є дві важливі моменти.

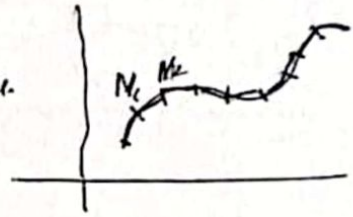
7

I Означення довжини кривої.

Тут ми ідемо шляхом означення довжини кола, як границю вписаного многокутника.

В параметрично задану криву вписуємо ломану

Довжину ломаної позначимо
через $L(p)$ p -роздітте, $d(p)$ -діам.
роздітте



$$\text{Означення. } L\text{-довжина} = \lim_{d(p) \rightarrow 0} L(p)$$

Тоді довжина кривої дорівнює границі довжини ломанки при прелюдванні діам. роздітте до нуля.

Зауважимо, що при $d(p) \rightarrow 0$ довжина ломанки $\rightarrow 0$.

II Доведення формули обчислення довжини кривої.

Запишемо суму вугтовені між точками M_i, M_{i+1} ломаної і застосуємо формулу Лагранжа для отримання
(пропущено φ', ψ')

$$L(p) = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})]^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\tilde{t}_i)]^2 + [\psi'(\tilde{t}_i)]^2} \Delta t_i$$

Точки $\tilde{t}_i, \tilde{t}_i$ - різні! в $[t_{i-1}, t_i]$

$$\text{Тепер } L = \lim_{d(p) \rightarrow 0} L(p) = \lim_{d(p) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{[\varphi'(\tilde{t}_i)]^2 + [\psi'(\tilde{t}_i)]^2} \Delta t_i$$

Якщо би $\tilde{t}_i = \tilde{t}_i$ були різними, то це була б інтегральна і границя дорівнювала $\int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$ і формула була б доведена.

(Але хто-то так припустив і закінчив доведення.
Не ПІУ, але менше!)

Дані ще обґрунтування того, що так менше зводити! Доведеться що залежне $\tilde{t}_i$ не $\tilde{t}_i$ не(світло) впливає на границю $L(p)$.

(розділіть!) Розгляньте формули обчислення довжини кривої при різних роздіттах!

Формула поверхні обертання.

Вітаємо як "плоскості" кривотамеи вимірюють площу "вигнуті" поверхні є не прості. Тут також "працює" ідея надлишковості поверхні обмеженої, як у випадку площі сфери. У загальному випадку це питання буде розв'язатися в наступному семестрі.

У нас простіший випадок. Поверхня яку ми розглядаємо є поверхню обертання деякої кривої. Таку означення площі поверхні обертання ми зробимо так.

1°. Випускимо для кривої ланку, яка експонується з n ланок.

2°. Обертимо ланку навколо осі OX .

3°. Кожен ланка ланкою ^{отриму} обернувшись поверхню зрізаної конуса, або циліндра поверхню циліндра (у випадку, якщо ланка $\parallel OX$).

4°. Поділимо площі поверхонь обертання всіх ланок. Це позначимо $S(p)$

вважатимемо зрізані конуси.

Візьмемо поверхню якої

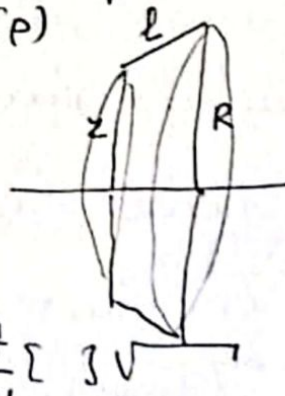
$$S(p) = 2\pi l \frac{z+r}{2}$$

$$\text{Візьмемо і отримаємо } S(p) = \pi \sum_{i=1}^n [z_i \sqrt{1 + \Delta x_i^2}]$$

Але. Означимо, $S = \lim_{d(p) \rightarrow 0} S(p)$

Зовнішню $S(p)$ го інтегральної суми (як і у випадку зрізаних конусів). Але тут знову в сумі є різні

$t_i, \tau_i, \tilde{t}_i$. Якщо б вони були рівні, то зрештою (як інтегральної суми) була б рівна інтегралу,



Щоб діяти до інтеграції суми всіх
членів дорівнює і так вивислося і
показується, що те ж саме належить до нуля.

9

Розвн. $\tilde{O}(p, \xi) = 2\pi \sum f(\xi_i) \cdot \xi_i \Delta x_i$

$mP \leq \tilde{O}(p, \xi) \leq mQ$ $\tilde{O}(p, \xi)$ - інтегральна сума.

$mP \leq mV \leq mQ$. Звідси отримуємо,

що $\forall \varepsilon > 0 \exists p_\varepsilon : |mV - \tilde{O}(p, \xi)| < \varepsilon \rightarrow$

$\rightarrow \lim_{d(p) \rightarrow 0} \tilde{O}(p, \xi) = \int_a^b 2\pi f(x) \cdot x dx$, бо $f(x) \cdot x$ -

інтегрована. Тому $mV = 2\pi \int_a^b f(x) x dx$.

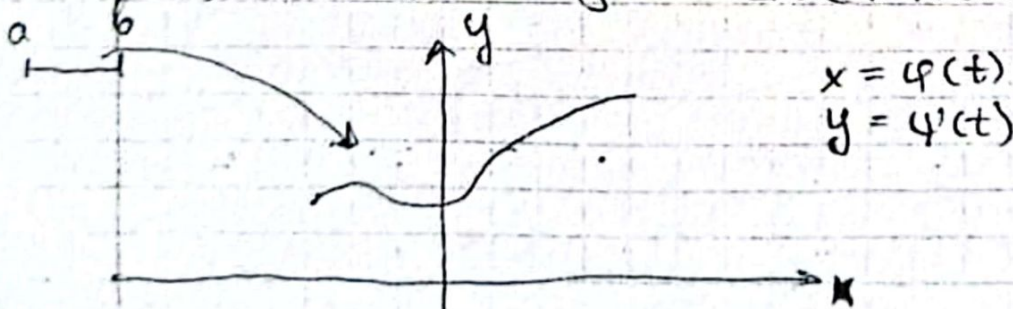
Довжина кривої

Визначення про криву.

Озн. Параметризованою кривою буде -
то називається ф-то $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$. Якщо φ і ψ - непер., то
то γ - неперервна, якщо φ, ψ - дифер.
то γ - дифер., якщо φ' і ψ' - непер.,
то γ - неперервно диференційована.

Параметриз. крива зветься простою, якщо γ - ін'єктивна.



Проста крива не має самонахрещувань, бо різні t відповідають різні точки.

Крива замкнута, якщо $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Нехай Γ - множина неперервно-диференційованих простих параметриз. ~~кривих~~ ~~і рівнянь~~

$$\Gamma = \{ \gamma(t) \}$$

В ній введено відношення $\sim$:
 $\gamma \sim \gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} \exists \varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b], \varphi$ - ^{строго} монотонно -

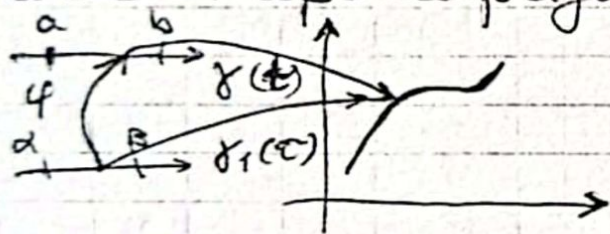
функція, непер. диференційована, що

$$\gamma \circ \varphi = \gamma_1$$

Виявляється, що $\sim$ - 1. рефлексивне (можна взяти $\varphi(t) = t$) 2. симетричне ($\exists \varphi^{-1}$) 3. транзитивне.

Розгн. $\Gamma / \sim$.

Означ. Простою кривою називаємо клас параметризованих кривих по віднош. $\sim$



$$\text{Пр-г. } \gamma_1 \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad \gamma_2 \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\gamma_3 \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \gamma_4 \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ - р-не однієї і тієї ж кривої.

$\gamma([a, b]) = \gamma \circ \varphi^{-1}([a, b])$ - слід параметриз. кривої.

Всі криві з цього класу. до одного і того самого класу мають той самий слід.

(γ) - клас параметриз. кривих.

Поняття про довжину кривої Формули обчислення.

Діагаі (γ) - неперервно дифер. крива,
 $\gamma(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ - деяка параметризація.
 $t \in [a, b]$

Розв. розбиття p $a = t_0 < \dots < t_n = b$.
 Розв. точки $(\varphi(t_i), \psi(t_i)) \in \gamma$. Візь-
 мемо націну, поділ. по цих точках
 $\ell(p)$ - її довжина.

$$\ell(p) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}$$

Ознак. Довжиною кривої (γ) будемо
 називати $\lim_{d(p) \rightarrow 0} \ell(p) = \ell$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \forall p \ [d(p) < \delta \rightarrow |\ell - \ell(p)| < \varepsilon].$$

Отримали формулу для обчисл. довжини
 φ, ψ - дифер. $\rightarrow$ за т. Лагранжа

$$\ell(p) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\varphi'(\tilde{c}_i))^2 + (\psi'(\tilde{c}_i))^2} \Delta t_i \quad \tilde{c}_i, \tilde{c}_i' \in [t_i, t_{i-1}]$$

Доведемо нерівність:

$$\begin{aligned} |\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{c^2 + d^2}| &= \left| \frac{(a-c)(a+c) + (b-d)(b+d)}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} \right| \leq \\ &\leq |a-c| \frac{|a|+|c|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} + |b-d| \frac{|b|+|d|}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}} \leq |a-c| + |b-d|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Отже, } \ell(p) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(\varphi'(\tilde{c}_i))^2 + (\psi'(\tilde{c}_i))^2} \Delta t_i + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{(\varphi'(\tilde{c}_i))^2 + (\psi'(\tilde{c}_i))^2} - \sqrt{(\varphi'(\tilde{c}_i))^2 + (\psi'(\tilde{c}_i))^2} \right) \Delta t_i = A \end{aligned}$$

$$x'_\varphi = r'(\varphi) \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi$$

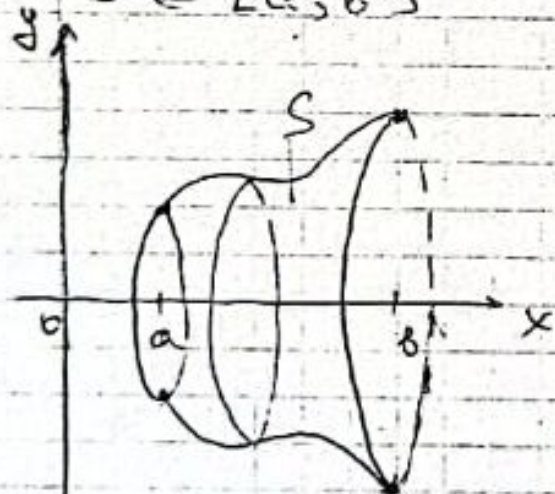
$$y'_\varphi = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi$$

$$[x'_\varphi]^2 + [y'_\varphi]^2 = (r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2$$

$$\text{Тому } l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2} d\varphi$$

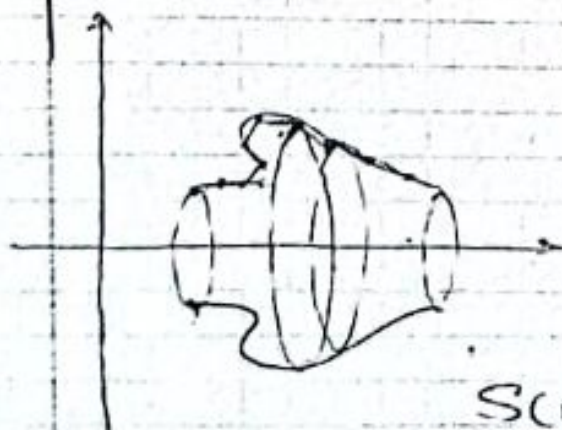
Площа поверхні обертання

Нехай задано деяку криву $y = f(x)$
 $x \in [a, b]$ $f(x) > 0$



Розв. (γ) - неперервно
дифер.

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ - довільна
на параметриза-
ції. $t \in [a, b]$



Розв. $\forall p: a = t_0 < \dots < t_n = b$
Розв. точки

$(x(t_i), y(t_i))$, подугу-
ємо на ній

Познаємо через
 $S(p)$ площу обертання

Невласиві інтеграли

1

лекція 11

При визначенні поняття означеного інтеграла

$\int_a^b f(x) dx$ важливо є те, що:

- 1) $[a, b]$ - скінченний відрізок
- 2). функція $f(x)$ обмежена на $[a, b]$

Природним є питання: де далі означення інтеграла від не обмежених функцій чи по необмеженому проміжку? Це питання розглянемо у цьому розв'язі.

I Невласиві інтеграли по необмеженому проміжку

Нехай функція $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, f -інтегровна на $\forall [a, b] \subset [a, +\infty[$

Означення 1.
$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$$

Приклад 1.
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctg x]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\arctg A - \arctg 0] = \frac{\pi}{2}$$

Якщо в означенні 1 існує скінченна границя, то кажемо що інтеграл збіжний, в протилежному випадку — розбіжний.

Приклад 2.

$$p \neq 1 \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[\frac{A^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right] = \begin{cases} p > 1 \text{ збіжний} \\ p < 1 \text{ розбіжний} \end{cases}$$

$$p = 1 \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln|x| \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} [\ln|A| - \ln|1|] = \text{збіжний не існує}$$

Отже
$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{збіжний} & \text{при } p > 1 \\ \text{розбіжний} & \text{при } p \leq 1 \end{cases} !$$

Наприклад $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ - збіжний. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ - розбіжний

Властивості невластивих інтегралів

(2)

1. $\int_a^\infty f(x) dx$ - збіжний $\Leftrightarrow \forall b > a, \int_b^\infty f(x) dx$ - збіжний

Доведення.

$$\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f(x) dx + \int_b^A f(x) dx \right)$$

З існуючим зрешенням в лівій частині випливає існування зрешення вправі і навпаки.

2. $\int_a^\infty f(x) dx$ - збіжний $\Leftrightarrow \lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^\infty f(x) dx = 0$

Доведення.

$$\left. \begin{aligned} \int_a^\infty f(x) dx &= \int_a^A f(x) dx + \int_A^\infty f(x) dx \\ \int_a^\infty f(x) dx &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \lim_{A \rightarrow \infty} \int_A^\infty f(x) dx = 0$$

3. Якщо $\int_a^\infty f(x) dx$ - збіжн. і $\int_a^\infty g(x) dx$ - збіжн. $\Rightarrow$

$$\int_a^\infty [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^\infty f(x) dx + \beta \int_a^\infty g(x) dx.$$

Доведення. В ртності переіфеєє го зрешенні $A \rightarrow +\infty$

$$\int_a^A [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^A f(x) dx + \beta \int_a^A g(x) dx$$

2. Невластиві інтеграли від додатних функцій

Споєтєу розглянемо властивості інтегралів від додатних функцій

Теорема 1. Нехай $\forall x \in [a, +\infty[f(x) \geq 0$. Тоді

$$\int_a^\infty f(x) dx - \text{збіжний} \Leftrightarrow \int_a^A f(x) dx = \Phi(A) - \text{обмежене зверху}$$

Доведення випливає з того, що $\Phi(A)$ - монотонна функція (оскільки $f(x) \geq 0$). А монотонна функція (зростаюча) має зрешення, якщо вона обмежена зверху

Теорема 2. (Ознака порівняння)

(3)

Нехай $\forall x \in [a, +\infty[$ $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$

1°. $\forall x \in [a, +\infty[$ $[f(x) \leq g(x)] \Rightarrow$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx - \text{збігання} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx - \text{збігання}$$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx - \text{розбігання} \Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx - \text{розбігання}$$

2°.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq K < \infty & \int_a^{\infty} g(x) dx - \text{зб.} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx - \text{збіг.} \\ 0 < K \leq \infty & \int_a^{\infty} f(x) dx - \text{зб.} \Rightarrow \int_a^{\infty} g(x) dx - \text{збіг.} \end{cases}$$

(тобто при $0 < K < \infty$, обидва інтеграли беруть себе однаково (збігання або розбігання))

Доведення. 1° Нехай $f(x) \leq g(x)$, $\int_a^A f(x) dx = \Phi(A), \int_a^A g(x) dx = G(A)$

$$\text{з чого } f(x) \leq g(x) \Rightarrow \Phi(A) \leq G(A)$$

$$\text{Якщо } \int_a^{\infty} g(x) dx \xrightarrow{\text{т.1}} G(A) - \text{одн.} \Rightarrow \Phi(A) - \text{одн.} \xrightarrow{\text{т.1}} \int_a^{\infty} f(x) dx - \text{збіг.}$$

2°. Нехай $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K < \infty$ дл.

$$\text{дл. } \forall \varepsilon = 1 \exists A_0 \forall x > A_0 \left[K-1 < \frac{f(x)}{g(x)} < K+1 \right]$$

$$\text{значить } \forall x > A_0 \quad f(x) < (K+1)g(x)$$

$$\text{Тоді } \int_a^{\infty} f(x) dx - \text{збіг.} \Rightarrow \int_{A_0}^{\infty} f(x) dx - \text{збіг.} \Rightarrow \int_{A_0}^{\infty} (K+1)g(x) dx - \text{збіг.} \Rightarrow$$

$$\int_{A_0}^{\infty} (K+1)f(x) dx - \text{збіг.} \Rightarrow \int_{A_0}^{\infty} (K+1)g(x) dx - \text{збіг.} \Rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx - \text{збіг.}$$

В кінці ідентично використувати рішення збігання власності:

$$\text{У випадку } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K \quad (0 < K < \infty) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f(x)} = \frac{1}{K} \quad (0 \leq \frac{1}{K} < \infty)$$

і застосувати те саме рішення збігання внаслідок.

функція. Але порівняння було виконано вугад, (4)
 $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}, p > 0$

Аналізувати не зможуть $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 2} = \int_1^{\infty} f(x) dx$

Але порівняння виконаємо $g(x) = \frac{1}{x^3}$

Тоді $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x^4 + x^2 + 2} = 1 = K \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$ - збіжний $p=3 > 1$
 отже наш і-й збіжний.

Аналізувати не зможуть

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x \sqrt{x}} dx, f(x) = \frac{\ln x}{x \sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

Отримаємо функцію $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Але чого розглянемо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{1/4}} = (\text{проблема}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{\frac{1}{4} x^{-1/4-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^{5/4}} = 0$$

Це означає, що з деякою величиною $x > A_0$

$$\frac{\ln x}{x^{1/4}} < 1 \Rightarrow \frac{\ln x}{x \sqrt{x}} < \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1.5}}$$

Зі збіжності $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{1.5}}$ - зє п.1 отримаємо $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x \sqrt{x}} dx$ - збіжний

Запам'ятайте! Так само можна показати

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx - \text{збіжний при } p > 1. \left(\frac{\ln x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \cdot \frac{\ln x}{x} \right)$$

Зрозуміло це!

Критерій Коші збіжності невластивих інтегралів
Абсолютний і неабсолютний збіжність

В першому семестрі ми розглянули критерій Коші існуючого границі функції (праву нерівність Коші)
 Наразі для всіх понять, які вивчаються через пошукте границі, ми будемо розглядати критерій Коші їх існування.

Нехай $f(x)$ - збіжно p -іє на $[a, +\infty[$ (5)

За означення

$$\exists \int_a^\infty f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \underbrace{\phi(A)}_{\phi(A)} \quad \text{крит. Коши}$$

$$= \forall \varepsilon > 0 \exists A_0 \forall A_1, A_2 > A_0 [|\phi(A_2) - \phi(A_1)| < \varepsilon]$$

$$\left| \int_a^{A_2} f(x) dx - \int_a^{A_1} f(x) dx \right| = \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

Отже, отримали

Критерій Коши збіжності

$$\exists \int_a^\infty f(x) dx - \text{зб.} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists A_0 \forall A_1, A_2 [A_1 > A_0, A_2 > A_0 \Rightarrow \left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| < \varepsilon]$$

Означення 2

$$\int_a^\infty f(x) dx - \text{збіж. абсол.} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^\infty |f(x)| dx - \text{збіжний}$$

Означення 3.

$$\int_a^\infty f(x) dx - \text{збіжність не абсол.} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^\infty f(x) dx - \text{збіжн.} \wedge \int_a^\infty |f(x)| dx - \text{розбіжн.}$$

Теорема. Якщо $\int_a^\infty |f(x)| dx - \text{збіжн.}$, то $\int_a^\infty f(x) dx - \text{збіжний}$

Доведення випливає з критерію Коши і нерівності

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{A_1}^{A_2} |f(x)| dx \right| \quad (\text{розумійте і} / \text{говоріть!})$$

! Але навіщо не лірич! (Це ми покажемо в темі "реф")

Важливі приклади.

$$\int_0^\infty \sin x dx - \text{розбіжний.} \quad \text{Але} \quad \int_0^\infty \sin x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A \sin x dx =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} -\cos x \Big|_0^A = \lim_{A \rightarrow \infty} (1 - \cos A) = 1 - \lim_{A \rightarrow \infty} \cos A$$

значення не існує

аналогічно $\int_a^\infty \cos x dx - \text{розбіжний}$

Висновок з попередньої теореми:

(6)

Тип розкладання не збіжності $\int_a^\infty f(x) dx$,
 де $f(x)$ - деяка функція

Либо ми введемо збіжність інтеграла $\int_a^\infty |f(x)| dx$ (за означенням)
 то отримаємо збіжність $\int_a^\infty f(x) dx$. У випадку, якщо

$\int_a^\infty |f(x)| dx$ - розбіжний, тоді $\int_a^\infty f(x) dx$ буде
 збіжним. Потрібно знати розкладання.

Для розкладання на збіжність інтегралів $\int_a^\infty f(x) dx$
 функції f є ознаки Абеля і Діріхле.

Нехай підінтегральна функція f є добутком двох
 функцій, тобто $\int_a^\infty f(x) g(x) dx$ (1), f, g, f', g' - неперер.
 $g(x)$ - монотон.

Ознака Абеля. Якщо f', g', f, g - непер. $g(x)$ - мон., то

1. $\int_a^\infty f(x) dx$ - збіжн.
 2. $g(x)$ - монот. і вбл.
- $\Rightarrow$ (1) - збіжний

Означення Діріхле. Нехай $\Phi(A) = \int_a^A f(x) dx$

1. $\Phi(A)$ - обмежений

$$\exists L \quad \forall A \in [a, \infty) \quad |\Phi(A)| \leq L \quad \Rightarrow (1) \text{ збіжний,}$$

2. $g(x)$ - монот., $g(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$

Приклад. Дослідити на збіжність $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$

$\int_1^\infty \sin x \cdot \frac{1}{x} dx$, Застосуємо ознаку Діріхле.

$$\left| \int_1^A \sin x dx \right| = | -\cos 1 + \cos A | \leq 2 \quad (\cos x \in [-1, 1])$$

$g(x) = \frac{1}{x}$ - монот., $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Отже $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ - збіжний, Аналогічно можна

показати, що $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p} dx$ - збіжний при $p > 0$.

Але $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx$ при $p \leq 1$ не є збіжним.

Тобто $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ при $p \leq 1$ не є абсолютною збіжністю. (7)

Доведемо це для $p=1$.

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx, \quad \text{— розділення} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \text{ — розділення.}$$

розділення збіжності за ознакою Діріхле (покажіть!)

Ще означимо.

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_{-B}^a f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow +\infty \\ B \rightarrow -\infty}} \int_B^A f(x) dx$$

Властивості цих інтегралів аналогічно говоренню. Маємо користуватися формулою Н-Л.

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = F(\infty) - F(a) \quad \text{де } F(x) \text{ — первісна, а}$$

$$F(\infty) = \lim_{A \rightarrow \infty} F(A)$$

II Інтеграли від невід'язливих функцій

Розглянемо випадок інтегралів від невід'язливих функцій. Тоді, в околі яких функція $f(x)$ є невід'язливою, можуть бути на кінцях інтервалу $[a, b]$, або в інтервалі.

Нехай $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f — інтегровна в $[a, c] \subset [a, b]$

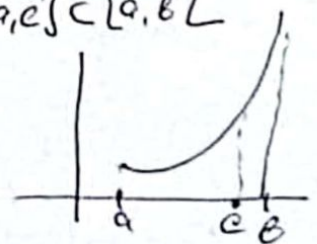
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx$$

аналогічно $f(x)$ — невід'язл. в $U(a)$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx$$

аналогічно $f(x)$ — невід'язл. в $U(c)$, $c \in]a, b[$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0}} \int_{a+\eta}^{b-\varepsilon} f(x) dx$$



Важливі приклади.

$$p \neq 1. \int_0^a \frac{dx}{x^p} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^a \frac{dx}{x^p} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_{\eta}^a = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{1-p} [a^{1-p} - \eta^{1-p}] =$$

$$= \begin{cases} p > 1 & \text{збіжність не існує} \\ p < 1 & \text{збіжність існує} \end{cases}$$

$$p=1 \quad \int_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{\eta}^a \frac{dx}{x} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \ln|x| \Big|_{\eta}^a = \lim_{\eta \rightarrow 0} [\ln|a| - \ln|\eta|] = \overset{\infty}{\text{збіжність не існує}}$$

$$\int_0^a \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \text{збіжний при } p < 1 \\ \text{розбіжний при } p \geq 1 \end{cases}$$

Аналогічний приклад

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \begin{cases} \text{збіжний при } p < 1 \\ \text{розбіжний при } p \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} \text{зб. при } p < 1 \\ \text{розб. при } p \geq 1 \end{cases}$$

Невласні інтеграли від невід'ємних функцій мають аналогічні властивості, які дозволяють рівняти для інтегралів по невід'ємному проміжку

Для дослідження збіжності також застосовуються ознаки перетягнення та ознаки Абеля і Діріхле.

Для перетягнення використовуються також розглянуті інтеграл. Це ви подивитесь в задачі "Завдання 16".

Для зручного вивчення цієї теми пропонується розглянути в семінарах всі ці питання.

Невластиві інтеграли

1

Послідовність на збіжність

1°. f, g - додатні
- ознака порівняння2°. Функції збіжні:
- ознака Абеля
- ознака ДіріхлеДля інтегралів $\int_a^{\infty} f(x) dx$ порівняння з $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} p > 1 \text{ зб.} \\ p \leq 1 \text{ розб.} \end{cases}$ для квал. ф-ції порівняння $\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} p < 1 \text{ зб.} \\ p \geq 1 \text{ розб.} \end{cases}$ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} + \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} p < 1 \text{ зб.} \\ p \geq 1 \text{ розб.} \end{cases}$ Ознаки Абеля і Діріхле для $\int_a^{\infty} f(x)g(x) dx$ Абелю 1. $\int_a^{\infty} f(x) dx = \text{зб.}$
2. $g(x) \sim \text{мон. вил.}$ Діріхле 1. $|\int_a^A f(x) dx| - \text{обм.}$
2. $g(x) \rightarrow 0 \text{ мон.}$ $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)g(x) dx = \text{зб.}$ Приклади.

1. $\int_1^{\infty} \cos 3x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \cos 3x dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{\sin 3x}{3} \right|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin 3A}{3} - \frac{\sin 3}{3} \right) = \text{розб.}$

2. $\int_1^{\infty} \frac{x dx}{x^3 + x + 2} = \text{зб.}$ $\frac{x}{x^3 + x + 2} \leq \frac{1}{x^2}$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \text{зб.}$ $\frac{\text{б.г.н.}}{\text{зб. озн. порівн. квал. ф-ції зб.}}$

3. $\int_2^{\infty} \frac{(x^2+1) dx}{x^4 - x^2 - 5} = \text{зб.}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^4 - x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x^2}{x^4 - x^2 - 5} = 1$

4. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \int_e^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = - \frac{1}{\ln x} \Big|_e^{\infty} = 1 - \text{зб.}$

5. $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x \sqrt{x}} dx$ $\frac{\ln x}{x \sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1+1/4}} \cdot \left(\frac{\ln x}{x^{1/4}} \right)^{<1} < \frac{1}{x^{5/4}}$ $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{5/4}} = \text{зб.}$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^{1/4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1/4 x^{1/4-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^{1/4}} = 0$

$$6. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{x-1}} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \sqrt{x-1}} \quad (2)$$

$$x \rightarrow 1 \quad \frac{1}{x \sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{(x-1)^{1/2}} \quad p < 1 \quad \text{збітє}$$

$$x \rightarrow \infty \quad \frac{1}{x \sqrt{x-1}} \sim \frac{1}{x \sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} \quad p > 1 \quad \text{збітє}$$

$$7. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} \quad \frac{1}{x^p \ln^q x} < \frac{1}{x^p} \quad p > 1 \quad - \text{збітє.}$$

$q > 0$

$$8. \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx, \quad p > 1 \quad \frac{\ln x}{x^p} = \left(\frac{\ln x}{x^{\epsilon}} \right) \frac{1}{x^{p-\epsilon}}, \quad p-\epsilon > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{p x^{p-1}} = \dots = 0,$$

$$9. \int_2^{\infty} x^p e^{-x} dx \quad x^p e^{-x} = \frac{x^p}{e^x} < \frac{x^p}{x^{p+2}} < \frac{1}{x^2} \quad e^x > x^q \quad \forall q > 0$$

збітє.

$$10. \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx + \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$$

$$x \rightarrow 0 \quad \frac{\sin x}{x^p} \sim \frac{x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \quad p-1 < 1, p < 2, \quad (\text{збітє})$$

$$x \rightarrow \infty \quad \text{абсол. збітє.} \quad \int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| dx, \quad \left| \frac{\sin x}{x^p} \right| < \frac{1}{x^p} \quad p > 1 \quad (\text{збітє.})$$

не абсол. збітє.

$$\int_1^{\infty} \sin x \frac{1}{x^p} dx,$$

Бігноб.

абсол. збітє. $1 < p < 2$

не абсол. $0 < p < 2$

$$\left| \int_1^A \sin x dx \right| = |\cos 1 - \cos A| < 2$$

$$\frac{1}{x^p} \rightarrow 0, \text{ при } p > 0$$

(збітє.) $p > 0$

$$11. \int_0^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx = \int_0^1 + \int_1^{\infty}$$

$$x \rightarrow 0 \quad \frac{\ln(1+x)}{x^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}} \quad p-1 < 1, p < 2, \quad (\text{збітє})$$

$$x \rightarrow \infty \quad \frac{\ln(1+x)}{x^p} \sim \frac{\ln x}{x^p} \quad p > 1 \quad 1 < p < 2 \quad (\text{збітє})$$

Ряди

I Числові ряди

Поряд з скінченними сумами, математика розглядає і нескінченні суми

Наприклад

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$



Тобто розглядає такі символи (!!!)

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Наприклад.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

Питали: Заму це рівнос? ?

Але (!) поки не дано визначення: Що ми роз-
уміємо розуміємо (?) не можна сказати,
це заму це рівнос.

Завжди математика дійшла до гітких
означень !

Наприклад Ейлер вивів, що

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$$

Ін він вивів?

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = 1 - (1 - 1 + 1 - \dots) = 1 - S$$

$$\text{звідси } 2S = 1, S = \frac{1}{2}.$$

Памі буде показано, як математика дає
означення суми

перше - цей ряд не має суми

друге - сума цього ряду $= \frac{1}{2}$

Ряди

I. Числові ряди.

1.° Поняття ряду. Збіжні, розбіжні ряди. Сума.

Розв. деякі послідовності чисел (a_n) Деякі символ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ що ряди називають

$$A_1 = a_1$$

$$A_2 = a_1 + a_2$$

$$A_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$A_n = a_1 + \dots + a_n$$

Озн. Ряди будуть називати дві по-
слідності $(a_n), (A_n)$, де (a_n) - по-
слідність членів ряду, а (A_n) - по-
слідність часткових сум.

Озн Ряд (1) зветься збіжним, якщо
 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A < \infty$.

Ряд (1) зветься розбіжним, якщо
 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ A - сума ряду.

Сума скінченна - $A < \infty$ ряд збіжний
Сума нескінченна } ряд розбіжний
Сума неіснує

$$(2) - \text{зб.} \rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B.$$

Розв'язуємо (3) зосереджуємося на $S_n = (\alpha a_1 + \beta b_1) + \dots + (\beta b_n + \alpha a_n) =$
 $= \alpha A_n + \beta B_n.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha A_n + \beta B_n) = \alpha A + \beta B$$

$\rightarrow$ (3) - збіжний $\blacktriangleleft$

Розв'язуємо ряд (4) $a_m + a_{m+1} + \dots + a_{m+n} + \dots$
 мінус ряд (1) - почнемо з m -го члена

Теорема 2. Якщо (1) збіжний, то (4) - збіжний і навпаки: (1) - зб. $\Leftrightarrow$ (4) - зб.
 Розв'язуємо $A_{m+n} = A_m + A_n^*$ m -го члена

$$(1) - \text{зб.} \rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_{m+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_m + A_n^*)$$

$$\rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^*$$

$$\Leftarrow \text{Якщо (4) - зб., то } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^* \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (A_m + A_n^*) \rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_{m+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{m+n}$$

$$A = A_m + A^* \quad (A_m - \text{постійна!})$$

Теорема 3. Необхідна умова збіжності. (1) - зб. $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

$$\blacktriangleright (1) - \text{зб.} \rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n+1} = A$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0 = A - A$$

Або $A_n = A_{n-1} + a_n.$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_{n-1} + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \blacktriangleleft$$

Діп-гу. $1^\circ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$

$$A_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = \infty$. Тобто, даний ряд розбіжний.

$2^\circ 1 + q^1 + q^2 + \dots + q^n + \dots$

$$A_n = q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad |q| < 1$$

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$.

$$|q| > 1 \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \infty$$

Тобто цей ряд збіжний при $|q| < 1$. При $|q| \geq 1 \rightarrow$ ряд розбіжний.

3° Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$ - розбіжний.

Властивості збіжних рядів

Нехай маємо ряди

(1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

(2) $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$

Озн. Лінійною комбінацією рядів (1) і (2) зветься ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$ (3)

Теорема 1. Якщо ряди (1) і (2) збіжні, то ряд (3) теж збіжний.

$\rightarrow (1) - \text{зб.} \rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A.$

Ряди з додативими членами.

Розв. ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ (1)
 $a_n > 0 \quad \forall n$.

Теорема (Критерій збіжності). Ряд (1) збіжний $\iff (A_n)$ - обмежена.

► Якщо $a_n > 0$, то (A_n) - монот. зростаюча $\rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \rightarrow (1)$ - збіжний.

► $a_n > 0 \rightarrow (A_n)$ - монот. зростаюча, A_n - зб. $\rightarrow A_n$ - обмежена. ◀

Ознаки порівняння.

(1) $a_1 + \dots + a_n + \dots$, $a_n > 0$
(2) $b_1 + \dots + b_n + \dots$, $b_n > 0$

1° $\exists n_0 \forall n > n_0 \quad a_n \leq b_n \rightarrow \begin{cases} (2) - \text{зб.} \rightarrow (1) - \text{зб.} \\ (1) - \text{розб.} \rightarrow (2) - \text{розб.} \end{cases}$

► Можемо вважати, що $\forall n \quad a_n \leq b_n$ (що в Теор. 2 доведено, що збіжність ряду не залежить від перших n членів).
Тоді $\forall n \quad a_n \leq b_n$.
 $\rightarrow (b_n)$ - обмеж. $\rightarrow (a_n)$ - обмежена $\rightarrow$
 $\rightarrow$ ряд (1) - зб.

Якщо (1) - розб., то A_n - неогранич. $\rightarrow b_n$ - неогранич., (2) - розб. ◀

2° Нехай $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$.

При $k < \infty$ (2) - зб. $\rightarrow$ (1) - зб.,
(1) - розб. $\rightarrow$ (2) - розб.

При $k > 0$, то (1) - зб. $\rightarrow$ (2) - зб.
(2) - розб. $\rightarrow$ (1) - розб.

Отримано $\frac{a_n}{a_1} \leq \frac{b_n}{b_1} \rightarrow$
 $\rightarrow a_n \leq \frac{a_1}{b_1} b_n \quad \forall n \rightarrow$ Застосовувати

ознаку 1° , отримано результату

Ряди з монотонними членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_{n+1} \leq a_n$$

Критерій збіжності ряду з монот. членами.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) з монот. членами, то
 ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ збіг. або

розбіг. Водночасно.

Означення

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

Інтегральна ознака збіжності ряду.
 Нехай ряд (1) - монот. коефіцієнт
 члени, $f(x)$ - монот. φ -я, така що
 $f(n) = a_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіг.

$0 < k < \infty \rightarrow (1) \text{ i } (2)$ збіг. одночасно або розбігаються одночасно.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{зб. } p > 1 \\ \text{розб. } p \leq 1 \end{cases}$$

1°. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k < \infty \xLeftrightarrow{\text{def}} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0$

$$\frac{a_n}{b_n} < k + \varepsilon \quad \wedge \quad k - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n}$$

$a_n < (k + \varepsilon) b_n$. Отже, $\exists n_0 \forall n > n_0 \ a_n < (k + \varepsilon) b_n$

Враховуючи, що $b_n < (k + \varepsilon) b_n$ збігаються і розбіг. одночасно, і ознаку 1° порівняння, окрім цього, що ряд a_n зб. якщо b_n зб., і якщо a_n розб. то b_n розб.

2°. $k > 0$. Розглянемо $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{k} < \infty$,

тоді тв-ня 2° випливає з попереднього (міняючи місцями a_n і b_n). $\blacktriangle$

3°. $\exists n_0 \forall n > n_0 \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Тоді якщо

(2) збігається, то (1) збігається, якщо (1) розбіг., то ряд (2) розбіг.

Аналогічно до 1°, вважiamo, що $\forall n \ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$

Тоді $\frac{a_2}{a_1} \leq \frac{b_2}{b_1} \rightarrow \frac{a_3}{a_2} \leq \frac{b_3}{b_2} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}$

Тісно зв'язано і нерівності.

Ряди (продовження)

Тема "ряди" має два основних розділи

- числові ряди
- функціональні ряди

Ми почнемо розділ числові ряди

$$(1) a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Означення. Ряд (1) наз. збіжним, якщо

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A \quad A - \text{сумма.}$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n - \text{част. сума}$$

A - наз. сумою ряду.

! [Ми досліджуємо умови при яких ряд (1) збіжний]

Спочатку досліджуємо ряди з додативними членами

$$(a_n > 0)$$

Доведено три ознаки протвистення, для ряду

$$(1) a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$(2) b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

Найчастіше використовується також критерій з 2-го ознаки

$$\text{Якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K \quad 0 < K < \infty, \text{ то ряди (1) і (2)}$$

ведуть себе однаково (одн збіжні, одні обидва розв.)

І ще один важливий результат (крит. збіжності)

$$(1) - \text{збіжн.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (p \Rightarrow q) = (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow (1) - \text{розв.}$$

Але розглянемо: з чим порівнювати!

$\exists$ or $\exists!$ max i poz. page,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1° $q < 1$ гов-ме анализиране з. векторис
тавни и озв. — lim.

2° $\exists n_0 \forall n > n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \rightarrow$
 $\rightarrow a_{n+1} \geq a_n$ - не убыв. необх. усло
 ва. $\rightarrow (1)$ - разб.

3.0. Geometric $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots +$
 $+ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$

$$A_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} =$$
$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} \right)$$
$$\leq 1 \qquad \qquad \qquad \leq 1$$

$$\leq 2 \rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \rightarrow \text{ред збіжний}$$

Strenges $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}}$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \left(\frac{3}{2}\right)^n \rightarrow \infty$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n : \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$$

$$\frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{3^n}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \rightarrow \infty$$

D: ∞

On the, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow \infty$

Ряди з монотонними членами

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_{n+1} \leq a_n$$

Критерій збіжності ряду з монот. членами:

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) з монот. членами, то
 розбіг. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ збіг. або
 розбіг. $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2^k}$ збіг. або

Означення $\int_a^{\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$

Інтегральна ознака збіжності ряду:
 Нехай ряд (1) - монот. коефіцієнт
 такий, $f(x)$ - монот. φ -я, така що
 $f(n) = a_n$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіг.

тоді і лише тоді коли $\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$.

► f - монот. $\Rightarrow \forall x \in [n, n+1] \quad f(n) \geq f(x)$
 $\Rightarrow f(n+1) \leq f(x)$

Тоді $\int_n^{n+1} a_{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} a_n dx$

$\leq \int_n^{n+1} a_n dx$

Отже, $a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n$ Збіжність

суми $\sum_{n=1}^N \div$ terminated.

$$\begin{aligned}
 n=1: & \quad a_2 \leq \int_1^2 f(x) dx \leq a_1; \\
 n=2 & \quad a_3 \leq \int_2^3 f(x) dx \leq a_2 \\
 & \quad \vdots \\
 n+1 & \quad a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n.
 \end{aligned}$$

Отримавши $a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq a_1 + \dots + a_n$

$$a_{n+1} - a_1 \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq a_n$$

Принципиально, що a_n - збіжний. $\rightarrow$
 $\rightarrow (a_n)$ - обмежена. $\rightarrow \exists M \forall n \quad a_n \leq M. \rightarrow$

$$\rightarrow \int_1^{n+1} f(x) dx \leq a_n \leq M \quad \text{Тоді } \int_1^{n+1} f(x) dx$$

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^{n+1} f(x) dx \quad (\text{за теор. про збіжність}$$

може. послідовності $\int_1^{n+1} f(x) dx$ -
 може. зростає і обмежена зверху).

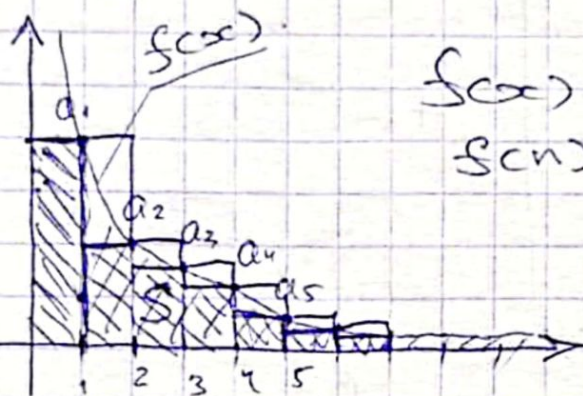
Нехай $\int_1^{\infty} f(x) dx < \infty$. Тоді

$$\forall n \left(\int_1^{n+1} f(x) dx \right) - \text{обмежена. Тоді } \exists M$$

$$\forall n \quad \int_1^{n+1} f(x) dx < M \rightarrow a_{n+1} - a_1 < M. \rightarrow$$

$$\rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \rightarrow (1) - \text{збіжний.}$$

Приклади.



$f(x)$ - монот.,
 $f(n) = a_n$.

$\int_1^{\infty} f(x) dx$ - площа під графіком.

площа S_{∞} - скінченна, то ряд збігається, і
 якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - зб., то S - скінченна.
 Якщо S_{∞} - нескінченна, то площа під
 функцією в тем скінченна, до $\sum_{n=2}^{\infty} a_n < \int_1^{\infty} f(x) dx$.

Навпаки, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - зб., то площа
 об'єдн. прямокутників - скінченна $\rightarrow$
 S - скінченна.

Приклади. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - гармонічний ряд.

Оскільки $f(x) = \frac{1}{x}$, $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln(x) \Big|_1^{\infty} = +\infty$.
 Отже, ряд розбігається.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ - узаг. гармонічний ряд.

$$f(x) = \frac{1}{x^p}, \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^{\infty} = (p \neq 1)$$

$$= \begin{cases} \infty, & p < 1. \\ \frac{-1}{1-p}, & p > 1. \end{cases}$$

Отже, при $p < 1$ ряд розбігається, $p > 1$ - ряд зб.

Ряд $\frac{1}{n^p}$ розбіг. при $0 < p \leq 1$ і зб. при $p > 1$.

$$3^\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \quad \vdots \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1. \quad \text{Storito } a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \rightarrow \quad \text{paqer} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

göic. i progö. oğraccas $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} - \text{göic}$

$$4^\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 + 2n + 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2 + \frac{1}{n}} \quad \text{gö.}$$

$$5^\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 1}} \quad \sum \frac{1}{n} \quad \text{progö.}$$

~~6. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$~~

$$6^\circ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \quad \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n} \quad \text{Storito} \quad \text{progö.}$$

$$7^\circ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \quad \frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{n \ln n} > \frac{1}{n^2}$$

$$\text{Paqer. } \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln x} =$$

$$= \ln \ln x \Big|_2^{\infty} = \infty. \quad \text{Örnek,} \quad \text{progö.}$$

$$8^\circ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n \sqrt{n}} \quad \frac{\ln n}{n \sqrt{n}} = \frac{\ln n}{n^{1+\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0 \quad n > n_0 \leq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = 0. \quad \leq \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}}} \quad \text{gö.} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\ln n}{n \sqrt{n}} \quad \text{gö.}$$

$$9^{\circ} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p} = \begin{cases} p \leq 1 - \text{розбігання} \\ p > 1 - \text{збігання} \end{cases}$$

$$\frac{\ln n}{n^p} = \frac{\ln n}{n^{1+\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}}, \quad \alpha > 0 \rightarrow \frac{\ln n}{n^{1+\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}}} < \frac{1}{n^{1+\frac{1}{2}}} - \text{зб.}$$

$$10^{\circ} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n} = \begin{cases} p > 1 - \text{зб.} \\ p = 1 - \text{розб.} \\ p < 1 - \text{розб.} \end{cases}$$

$$\text{Розб.} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln^q n} \quad ; \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln^q n}{n^p} - \text{зб. за розб.}$$

$$\sum a_n \quad \sum 2^k a_{2^k} \quad ; \quad a_n = \frac{1}{n^p \ln n}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^p \ln 2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k \ln 2 (2^k)^p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{2}{2^p}\right)^k -$$

$$\text{якщо } p = 1 - \text{розб. розб.}$$

$$p > 1 - \frac{2}{2^p} < 1 - \text{розб. зб.}$$

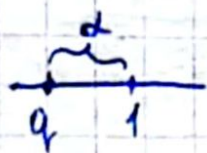
$$p < 1 - \text{розб. розб.}$$

Ознаки Коші і Дамандера

Розв. розб. (1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

Ознака Коші (варіант 1)
Керсет $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$

$q < 1 \rightarrow (1) - \text{зб.}$
 $q > 1 \rightarrow (1) - \text{розб.}$
 $q = 1 - \exists \text{ ек зб. так і розб.}$

► Механі $q < 1$  $1 - q = \delta$

Визначено $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \rightarrow \varepsilon = \frac{\alpha}{2} \exists n_0 \forall n > n_0 \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon$$

$$q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} \quad q_1 < 1 \quad (q + \frac{\alpha}{2} < 1.)$$

$$\text{Отже, } \exists n_0 \forall n > n_0 \quad a_n < q_1^n$$

Застосуємо $\sum_{n=1}^{\infty} q_1^n$ ознаки порівняння - зб. як серед

зб. прогресії при $q_1 < 1$. Тому

$$\text{Роз } a_n - \text{зб.}$$

$$q > 1 \quad \underbrace{1 \quad \alpha \quad q}_{q = 1 + \alpha}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \rightarrow \text{але } \varepsilon = \frac{\alpha}{2} \exists n_0 \forall n > n_0$$

$$\underbrace{q - \varepsilon}_{q_2} < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon \rightarrow \exists n_0 \forall n > n_0 \quad q_2^n < a_n, \text{ але } q_2^n - \text{розб.} \rightarrow a_n - \text{розб.}$$

$$\text{або } 1 < q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1 < a_n \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \rightarrow \text{необх. умова не вик.} \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{розб.}$$

$$q = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Отже, при $q=1$, роз може бути і зб. і розб.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Ознака Коши (2-ий варіант).

Геліхай $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тоді:

1. $q < 1 \rightarrow (1) - зб.$
2. $q > 1 \rightarrow (1) - розб.$
3. $q = 1 \rightarrow \exists$ як зб. так і розб. ряди.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 [\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon] \\ \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 [q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}] \end{cases}$$

Дов-ме $q < 1$ - аналогічно до 1-ого варі-
анту

$q > 1$ за тією ж схемою $\forall n_0 \exists n > n_0$

$$1 < q - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} \rightarrow 1 < a_n$$

Отже, $\exists a_n \geq 1$ як заборонено вимо-
вляти не зростає, що $a_n \geq 1 \rightarrow$
 $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$.

$q = 1$ - можна привести ми не при-
кладу

Ознака Д'Аламбера (1-ий варіант)

Геліхай $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ Тоді:

1. $q < 1 - (1) - зб.$
2. $q > 1 - (1) - розб.$
3. $q = 1 - \exists$ як зб. так і розб. ряди

$$\rightarrow q < 1 \quad \alpha = 1 - q \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{2} \quad \text{Тоді}$$

$$\exists n_0 \forall n > n_0 \quad q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon = q_1 < 1,$$

Розглянемо $\sum a_n$ і $\sum q_1^n$ з'ясуємо третю ознаку порівняння.

$$\text{Отримуємо: } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q_1^{n+1}}{q_1^n} = q_1 \rightarrow$$

$\rightarrow$ ряд (1) - зб. (за III ознак порівняння)

$$q > 1. \quad q - 1 = \alpha \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Для } \varepsilon = \frac{\alpha}{2} \exists n_0 \forall n > n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon \wedge$$

$$\wedge q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$1 < q_1$$

Отже, $\exists n_0 \forall n > n_0$

$$1 < q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow a_n < a_{n+1} \rightarrow$$

$\rightarrow$ ряд розб., бо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Але

визн. необхідна умова.

$$q = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1. \quad \blacktriangleleft$$

Ознака Даламбера (2-ий варіант)

$$\text{Нехай } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q. \text{ Тоді}$$

$$1. q < 1 - (1) - \text{зб.}$$

$$2. \exists n_0 \forall n > n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - (1) - \text{розб.}$$

Ряд $\sum a_n$ - збіжс $\iff \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A < \infty$

A - сума ряду

Необхідна умова збіжс.

$$\sum a_n - \text{зб.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Ряди з додатн. членами

✓ Ознаки порівн.

✓ Інтегральне ознака

a_n - монот., f - монот. $f(n) = a_n$

$$\left[\sum a_n - \text{зб.} \iff \int_2^{\infty} f(x) dx < \infty \right]$$

✓ Ознаки Коші, Даламбера

$$\left[\begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \quad (\text{озн. Коші}) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (\text{озн. Даламбера}) \end{array} \right]$$

$$\text{Тоді: } \left[\begin{array}{l} q < 1 - \text{рег. збіжс.} \\ q > 1 - \text{рег. розб.} \\ q = 1 - (\text{потрібно далі досліджувати}) \end{array} \right]$$

Приклади

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3} = \frac{1}{3} < 1 \quad \text{рег. збіжс.}$$

$$\text{або} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 / 3^{n+1}}{n^2 / 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1 \quad \text{рег. збіжс.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(n+1)!} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1 - \text{рег. збіжс.}$$

I. Якщо ряд (1) - збігається абсолютно, то $\rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^* = A^*$, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$

чи можна сказати про збігання $\lim P_s$ і Q_t ?

Припустимо, що $\exists \lim_{s \rightarrow \infty} P_s$ і $\lim_{t \rightarrow \infty} Q_t$.

Тоді $2P_s = A_n + A_n^* \rightarrow \exists \lim_{s \rightarrow \infty} 2P_s$!

Тоді $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} Q_t$. Отже, обидві ряди збігаються.

II. Якщо (2) - умовно збіжений, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \wedge \nexists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^*$

Тоді окремо P_s і Q_s не можна вивести.

Нехай δ - довільне число, ϵ - довільне число, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (P_s - Q_t) \rightarrow$

$\rightarrow \exists$ границя ряду, або

$A_n^* = 2P_s - A_n \rightarrow$ якщо $\exists \lim_{s \rightarrow \infty} P_s$, то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^*$ - суперечність.

Отже, (3) і (4) - прот.

Доведено таку теорему:

Якщо (1) абсолютно збіжений, то ряди з дод. і абсолютних величин збіжені, і сума ряду $A = P - Q$.
Якщо ряд (1) умовно збіжений, то ряди (3), (4) - розбіжні.

Асоціативна властивість рядів

Розглянемо ряд (1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$
(5) $(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) +$
 $+ \dots + (a_{n_k+1} + \dots + a_{n_{k+1}}) + \dots$ - ряд з
групами b_k позгрупованими
членами.

Розглянемо послідовність часткових
сум:

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \text{ згідно (1)}$$

$$B_1, B_2, \dots, B_k, \dots \text{ згідно (5)}$$

Легко зауважити, що $B_1 = A_{n_1}$

$$B_2 = A_{n_2}, B_3 = A_{n_3}, \dots, B_k = A_{n_k}, \dots$$

Отже, послідовність (B_k) - підпослі-
довність (A_n)

Теорема

а) Якщо ряд (1) - збіжний, то
ряд (5) з групами членів -
збіжний. Навпаки, якщо ка-
ждий член, крім того.

б) Якщо в ряді (5) в кожній
групі членів однаковий
знак, то з збіжності (5) ви-
світує збіжність (1).

а) $\Rightarrow$ (1) - зб $\rightarrow (A_n)$ зб $\rightarrow V(A_{n_k})$ - зб $\rightarrow (B_k)$ - зб $\rightarrow \text{рег}(5)$ - зб.
 $\text{Tr} - g$.
 $(1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots$ - рег g пофун
 $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$ - зб g пофун
 $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots$ - розбіжний.

б) $A_1, A_2, \dots, (A_{n_1}), \dots, A_i, \dots, (A_{n_2}), A_j, \dots, (A_{n_3})$
 $A_{n_i} \rightarrow A^*$ тоді де A_i ?
 $\leq A_i \leq A_{n_2} \vee A_{n_2} \leq A_i \leq A_{n_1} \rightarrow$ всі A_i тем
 уфуніюють зб A^*

Комутативна властивість абсолют-
 но збіжних регів. $\neq$

Розм. рег (1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$
 Регм. рег g $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$
 переставленими

$$(6) a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n + \dots$$

Теорема (Діріхле) Якщо рег (1) абсолютно
 збіжний $\Rightarrow$ то рег (6) тем збіж-
 ний $\Rightarrow$ сума (1) $\hat{=}$ сума (6) рівна сумі
 (6).

► Припустимо, що (1) - з додатніх
 членів.

Розглянемо часткову суму

$$A'_n = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n \leq A_m, \text{ де } m -$$

максимальний номер, в який
 входить $a'_1, \dots, a'_n$ в рег
 (1).

$A_m < A$ - сума ряду (1).

Отже, $\forall n \ A'_n < A$ (1) - ряд з дов. членів $\rightarrow A'_n$ - монотонна

(A'_n) - монот. і обмеж. $\rightarrow \exists \lim A'_n \leq A$

(1) - це перестановка ряду (6) $\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$

$$\rightarrow A \leq A' \rightarrow A = A'$$

Загальний випадок. Доведемо, що (1) - абсол. зб. Розглянемо ряди (3) і (4). Доведемо, що $A = P - Q$

Розв. (3) $|a'_1| + |a'_2| + \dots + |a'_n| + \dots$

(3'), (4') - ряди з дов. членів ряду (6)

$$(3') \ p'_1 + \dots + p'_s + \dots$$

$$(4') \ q'_1 + \dots + q'_s + \dots$$

(1) - абсол. зб. $\rightarrow$ (2) - зб. $\rightarrow$ (7) - зб. $\rightarrow$

$\rightarrow$ (6) - абсол. зб. $\rightarrow A' = P' - Q'$. Застосуємо тільки що доведено до (3'), (4').

(3), (4) : $P = P'$, $Q = Q'$. Отже,

$$A' = P' - Q' = P - Q = A. \quad \blacktriangle$$

Теорема Рімана

Нехай $\forall k, (-\infty \leq k \leq +\infty) \exists$ така перестановка членів ряду (1) зб. щоб $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{k'} = 0$.

З інтегральної ознаки маємо

(2)

$$\left[\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \text{збіг.} \Leftrightarrow \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^p} - \text{збіг.} \right]$$

Тому $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{array}{l} p > 1 - \text{збіг.} \\ p \leq 1 - \text{розбіг.} \end{array} \right]$

Ряди з глeнaми довільних знаків.

Знакопозеречні ряди

$$C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots \quad (-1)^{n+1} C_n + \dots \quad (1) \quad (C_n > 0)$$

Ознака Лейбніца

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \forall n \quad C_{n+1} \leq C_n \\ \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ряд (1) збігається}$$

$$\begin{aligned} \text{Дов.} \quad C_{2n} &= C_1 - C_2 + C_3 - C_4 + \dots + C_{2n-1} - C_{2n} \\ &= C_1 - \overset{\neq 0}{(C_2 - C_3)} - \overset{\neq 0}{(C_4 - C_5)} - \dots - C_{2n} < C_1 \end{aligned}$$

$$C_{2(n+1)} = C_{2n} + \overset{\neq 0}{(C_{2n+1} - C_{2n})} \geq C_{2n}$$

Тому C_{2n} - послідов. монот. зростає. $\wedge$ одбл. зверху $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n} = C.$$

$$\begin{aligned} \text{Тепер} \quad C_{2n+1} &= C_{2n} + C_{2n+1} \quad \lim C_{2n+1} = \lim (C_{2n} + C_{2n+1}) \\ &= \lim C_{2n} + \lim_{\substack{0 \\ \parallel}} C_{2n+1} = C. \end{aligned} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Тому} \\ \forall n \quad \exists \lim C_n = C \end{array} \right]$$

Дієлог. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$

(3)

збіжності при $p > 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{n^p} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{за ознак. Д. збіжн.}$$

Критерій Коші збіжності ряду

Теорема (Криі. Коші)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збіжн.} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, p [n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon]$$

Довед.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \text{збіжн.} \stackrel{\text{дл}}{=} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \stackrel{K}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m [n > n_0 \wedge m > n_0 \Rightarrow |A_m - A_n| < \varepsilon]$$

Нехай $m = n + p$, тоді

$$\begin{aligned} &= \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, p [n > n_0 \Rightarrow |A_{n+p} - A_n| = \\ &= |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon] \end{aligned}$$

Абсолютно і умовно (неабсолютно) збіжності
Ряду

(1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$

(2) $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$

Означення.

Ряд (1) наз. абсол. збігн. якщо ряд (2) збігн.

Означ.

Ряд (1) наз. умовно зб. якщо (1) - зб. л (2) розб.

Приклади

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Цей ряд збігн. за озна- Лейбніца, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ - розбігн. за ітер. ознакою.

Тому ряд $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ - умовно збіг.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ - абсол. зб., бо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ - збігн. $p=2>1$

Теорема.

Якщо ряд $\sum |a_n|$ - зб., то $\sum a_n$ - збігн.

Довед.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ - збігн. } \stackrel{\text{кр. К}}{=} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, p$$

$$[n > n_0 \Rightarrow |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon]$$

$$\Downarrow$$

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

Тому виконується крит. Коші:
збігн. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Властивості рядів з додатних і від'ємних членів
для абсолютної збіжності і умовно збіжних рядів.

- (1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$
 (2) $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$
 (3) $p_1 + p_2 + \dots + p_s + \dots$ p_s - додатні з (1)
 (4) $q_1 + q_2 + \dots + q_t + \dots$ q_t - від'ємні з (1)
 q_t - абсолютні збіжні з (1)

A_n - част. суми (1)

A_n^* - част. суми (2)

P_s - част. суми (3)

Q_t - част. суми (4)

Розглянемо випадок.

$$A_n = P_s - Q_t$$

I (1) - збіж. абсол. $\Rightarrow$ (1) і (2) - збіжні

$$A_n^* = P_s + Q_t$$

$$\Rightarrow \exists \lim A_n \wedge \exists \lim A_n^*$$

$$s+t=n$$

$$\Rightarrow \exists \lim P_s \quad 2P_s = A_n + A_n^*$$

II (1) - збіж. умовно $\Rightarrow$ (1) - збіж. і (2) роз.

$$\Rightarrow \exists \lim Q_t \quad 2Q_t = A_n^* - A_n$$

$$\Rightarrow \exists \lim A_n \wedge \nexists \lim A_n^*$$

Чи можуть $\exists \lim P_s \wedge \nexists \lim Q_t$?

Hi! бо тоді $\exists \lim A_n^*$

Чи можуть $\nexists \lim P_s \wedge \nexists \lim Q_t$?

Hi! бо тоді $\nexists \lim A_n$.

Висновок

$$\nexists \lim P_s \wedge \nexists \lim Q_t = \text{розв. (3) і (4) - розв.}$$

Отже, якщо (1) - абсол. збіж.,
то (3) і (4) - збіжні

Якщо (1) - умовно збіж.,
то (3) і (4) розбіжні

Ряди з ~~знаками~~ ~~знаками~~ з довільними

Знакопозитивні ряди

Вважаємо, що $c_n > 0$.

Розглянемо ряд

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \dots + (-1)^{n+1} c_n + \dots \quad (1)$$

Означення Лейбніца.

Нехай $\forall n \quad c_{n+1} \leq c_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$.

Тоді (1) - збіжний

► Розглянемо S_{2n} - часткові суми:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= c_1 + c_2 + \dots + c_{2n-1} - c_{2n} = \\ &= c_1 - (c_2 - c_3) - (c_4 - c_5) - \dots - (c_{2n-2} - c_{2n-1}) < \\ &\quad \underbrace{\leq 0}_{(3)} \quad \underbrace{\geq 0}_{\text{умови.}} \end{aligned}$$

$$< c_1$$

$$S_{2(n+1)} = c_{2n+1} + c_{2n} - c_{2n+2} \geq c_{2n}$$

(1) ... з однією

зверху. Отже, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$

Розв'яз. $C_{n+1} = C_n + C_{n+1} \rightarrow$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n + \lim_{n \rightarrow \infty} C_{n+1} = C$$

Отже, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C \rightarrow$ ряд збіг. $\blacktriangleleft$

Пр-9. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} =$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ — зб. за ознакою
 Лейбніса.

Мехай (1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$,
 а_n мають довільні знаки.
Критерій Коші збіжності
 ряду.

(1) — збіжний $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, p$:
 $n > n_0 \quad [a_{n+1} + \dots + a_{n+p}] < \varepsilon$.

$\blacktriangleright$ (1) — зб. $\stackrel{\text{def}}{=} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. За критерієм
 Коші зб. необхідною,
 $\forall \varepsilon \exists n_0 \forall m, n \quad n > m > n_0 \quad [a_m - a_n] < \varepsilon$
 $m = n + p$.

$$= \forall \varepsilon \exists n_0 \forall n, p \quad n > n_0 \quad [a_{n+p} - a_n] < \varepsilon$$

$$[a_{n+1} + \dots + a_{n+p}] < \varepsilon$$

Абсолютно і умовно збіжні ряди

$$(1) a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$(2) |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

Означення. Ряд (1) зветься абсолютно збіжним, якщо збігається ряд (2).

Означення. Якщо (1) - зб., і ряд (2) - розбіжний, то ряд (1) - умовно збіжний, або неабсолютно збіжний.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \text{умовно збіжний}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} - \text{абсолютно збіжний}$$

$$A = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{2} A$$

Абсолютно і умовно збіжні ряди.

$$1) a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$2) |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

Теорема. Якщо (2) збіжний, то ряд (1) -
біжний.

► (2)-зб. $\rightarrow$ за критерієм Коші $\forall \varepsilon > 0$
 $\exists n_0 \forall n, p [n > n_0 \rightarrow |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon] \rightarrow$
 $|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon \rightarrow$
для (1) викр. критерій Коші $\rightarrow$
 $\rightarrow$ (1)-зб. ◀

Властивості рядів з додатних і
від'ємних членів
для абсолютно і умовно збіж-
них рядів.

Для ряду (1) виведемо

(3) $p_1 + p_2 + \dots + p_s + \dots$ - ряд з год. членів
з (1)

(4) $q_1 + q_2 + \dots + q_t + \dots$ - ряд з абсолю-
тно збіжними членами від'ємних членів з
(1)

A_n - часткові суми ряду (1)

A_n^* - часткові суми ряду (2)

P_s - частк. сума (3)

Q_t - частк. сума (4)

$$A_n = P_s - Q_t \quad s+t=n$$

Властивості числових рядів

Асоціативна властивість рядів

Розглянемо ряди

$$(1) \quad a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

$$(5) \quad (a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots + (a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}) + \dots$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 b_1 b_2 b_k

$$(5) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_k + \dots$$

Розглянемо послідовність часткових сум

$$A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

$$B_1, B_2, \dots, B_k, \dots$$

Зауважимо, що $B_1 = A_{n_1}, B_2 = A_{n_2}, \dots, B_k = A_{n_k}$ Отже, послідовність $(B_k) \in \text{підпосл.}(A_n)$

Теорема. а) Якщо ряд (1) - збіжний, то ряд (5) збіжний навпаки, взагалі не вірно.

б). Якщо в ряді (5) в кожній дужці зламки однако збіжні то з збіжн. (5) випливає збіжн. (1)

Довед.

$$а). (1) - \text{збіжн.} \Rightarrow (A_n) - \text{збіжн.} \Rightarrow (B_k) - \text{збіжн.} \Rightarrow (5) - \text{збіжн.}$$

Після $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ не збіжн. ~~$\Rightarrow$~~ $i: (1-1) + (1-1) + \dots + (1-1) + \dots$ збіжн.

$$б). \quad A_1, A_2, \dots, A_{n_1}, A_{n_1+1}, \dots, A_{n_2}, \dots, A_{n_k}, \dots$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 B_1 B_2 B_3 B_k

$$B_1 < A_i < B_2 \Rightarrow A_j > B_3$$

Якщо a_j збіжн. Якщо a_n - збіжн.

$$\lim B_k = \lim A_n$$

Якщо посліг. (B_k) - збіжн., то посліг. (A_n) - збіжна

$$\in \mathcal{M}) \rightarrow (3^*) - \text{зб.} \rightarrow (3) - \text{зб.}$$

$(\lim S_k^* = S^* \leq A^* \cdot B^*)$ Для гов-ны

$S^* = A^* \cdot B^*$, $\text{рег}(3^*)$ непрерывно

представлено элементами рег и поряд

$$(4) |a_1||b_1| + (|a_1||b_2| + |a_2||b_2| + |a_2||b_1|) + (\dots) + \dots$$

Рассмотрим Q_n^* - частичную сумму рег (4)

$$Q_n^* = |a_1||b_1| + (|a_1||b_2| + |a_2||b_2| + |a_2||b_1|) + (\dots) + \dots + (|a_1||b_n| + \dots + |a_n||b_1|) =$$

$$= (|a_1| + \dots + |a_n|)(|b_1| + \dots + |b_n|) = A_n^* \cdot B_n^*$$

тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n^* = Q^* = A^* \cdot B^*$

$\text{рег } 3^*$ - непрерывный $\text{рег } 4 \rightarrow$
 $\rightarrow \text{зб.}$ попер. теоремой
 $S^* = A^* \cdot B^*$

Заменим известное, что $S = A \cdot B$.
 представлено элементами рег (3) так же

$$(5) a_1 b_1 + (a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_2) + \dots$$

$P_n = A_n \cdot B_n$
 Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P = A \cdot B$

$\text{рег } (3)$ - $\text{рег } 3$ представ. элементами
 где $\text{рег } (5)$ $\text{рег } 5$ $\text{рег } 5$ $\text{рег } 5$
 равна $A \cdot B$ - $S = A \cdot B$

Комутативна властивість абсолютно збіжних рядів

Розглянемо ряди

$$(1) a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$(6) a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n + \dots$$

де ряд (6) з переставленими членами ряду (1)

Теорема Діріхле. Якщо ряд (1) абсолютно збіжний,
то ряд (6) також збігається і сума ряду (1)
дорівнює сумі ряду (6)

Довед. Припустимо, що ряд (1) з додатними
членами. Розглянемо часткові суми ряду (6)

$A'_n = a'_1 + a'_2 + \dots + a'_n < A_m$, де m максимальний
номер з яких $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ входять в ряд (1)

A_m - монот. зростає. $A_m < A$ - сума ряду (1)

$$\text{Тоді } \forall n \quad A'_n < A \Rightarrow \lim A'_n = A' \leq A$$

(A'_n) - монот. зр.

Отримали, що при переставці членів ряду
сума ряду не зростає $A \leq A'$

Але ряд (1) є перестан. (6), тому
звізси $A' = A$

Розглянемо загальний випадок (ряд (1) - абсол. зб.)

$$(3) p_1 + p_2 + \dots + p_s + \dots \quad (3)(4) - \text{збіжні}$$

$$(4) q_1 + q_2 + \dots + q_t + \dots$$

$$A_n = P_s - Q_t \Rightarrow \lim A_n = A = P - Q \quad \begin{matrix} P - \text{сума (3)} \\ Q - \text{сума (4)} \end{matrix}$$

Для ряду (6)

$$(3') p'_1 + p'_2 + \dots + p'_s + \dots \quad \text{їх сума } P' = P$$
$$(4') q'_1 + q'_2 + \dots + q'_t + \dots \quad Q' = Q$$

Згідно твердження для
рядів з додатн. чл.

$$(2) |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$$

$$(7) |a'_1| + |a'_2| + \dots + |a'_n| + \dots$$

(1)-абсол. зб. $\Rightarrow$ (2)-збіжн. $\Rightarrow$ (7)-збіжн. $\Rightarrow$ (6)-абсол. зб.

$$\Rightarrow A' = P' - Q' \Rightarrow A' = P - Q \Rightarrow A' = A$$

Теорема Рімана

Теорема. Якщо ряд (1) збіжний неабсолютно (умовно збіжний), тоді $\forall K (-\infty \leq K \leq +\infty)$ $\exists$ така перестановка елементів ряду, що його сума буде дорівнювати K .

Дов.

$$(1) a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$(3) p_1 + p_2 + \dots + p_s + \dots$$

$$(4) q_1 + q_2 + \dots + q_t + \dots$$

Візьмемо: (1) - кс.абсол. зб. $\Rightarrow$ (3) і (4) - розбіжні

Нехай K - довільне і $K > 0$,

З того, що (3) розбіжний, можемо вибрати

з ряду (3) — $p_1, p_2, \dots, p_{n_1}$

$K < p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1}$ так, щоб при відкиданні p_{n_1} нерівність порушилася

Далі з (4) виберемо $q_1, \dots, q_{m_1}$

$K > (p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1}) - (q_1 + \dots + q_{m_1})$ так, щоб при відкиданні q_{m_1} нер. поруш.

Далі з (3) виберемо

$$p_{n_1+1}, \dots, p_{n_2}$$

$$K < (p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1}) - (q_1 + q_2 + \dots + q_{m_1}) + (p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2})$$

Знову виберемо $q_{m_1+1}, \dots, q_{m_2}, \dots$

Цей процес продовжуємо поки не відберемо всі члени ряду (3), (4), а знають всі члени ряду (1). Отримали ряд

$$(8) (p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1}) - (q_1 + \dots + q_{m_1}) + (p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2}) - (\dots$$

Часткові суми цього ряду відрізняються від K на остаточні члени в остаточній дужці - p_{n_i} або q_{m_i} .

Але, зі збіжності ряду (1) $\lim a_n = 0 \Rightarrow \Rightarrow \lim p_{n_i} = 0 \wedge \lim q_{m_i} = 0$

Тому часткові суми ряду (8) (S_k)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k = K$$

Враховуючи, що члени ряду (8) (в дужках) одного знаку, ми можемо опустити дужки (розгрупувати).

Отримали перетворені ряд який збігається до K .

Для випадку $K = +\infty$

$$1 < p_1 + \dots + p_{n_1}$$

$$(p_1 + \dots + p_{n_1}) - q_1$$

$$2 < (p_1 + \dots + p_{n_1}) - q_1 + (p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2})$$

$$(p_1 + \dots + p_{n_1}) - q_1 + (p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2}) - q_2$$

$$3 < (p_1 + \dots + p_{n_1}) - q_1 + (p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2}) - q_2 + (p_{n_2+1} + \dots + p_{n_3})$$

$$4 < \dots$$

Множення рядів

5

Дано

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

$$(2) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

Складемо таблицю

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 & \dots & a_n b_1 & \dots & \dots \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 & \dots & a_n b_2 & \dots & \dots \\ \hline \end{array}$$

$$a_1 b_n \quad a_2 b_n \quad a_3 b_n \quad \dots \quad a_n b_n \quad \dots \quad \dots$$

Означ. Добуток рядів (1) (2) в розумінні Коші
будемо називати ряд

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots$$

Теорема. Якщо ряди (1) і (2) абсолютно збіжні,
то добуток рядів (при довільному означенні)
буде збіжним і сума добутку рядів
буде дорівнювати сумі добутку сум.

$$S = A \cdot B$$

Застосовуючи, ми виірали елементи з таблиці
добутку елементів довільним способом.
Тобто ми будемо мати інші означення
добутку.

$$A' = P' - Q' = P - Q = A. \quad \blacktriangle$$

Теорема Римана

Пусть f — функция, заданная на отрезке $[a, b]$.
 Тогда f интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда f непрерывна на $[a, b]$.
 (1) — условие $(-\infty \leq x \leq +\infty)$ $\exists$ такая ϵ ,
 что для любого $\delta > 0$ найдется $\eta > 0$ такое, что
 для любых $x, y \in [a, b]$ из условия $|x - y| < \eta$ следует $|f(x) - f(y)| < \delta$.

► Укажіть k -скінченне, $k > 0$

лише (1) неабсолютно збіжний, то
 ряди (3) і (4) — розбіжні $\rightarrow$
 $p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1}$ щоб $p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} > k$,
 але так, щоб нерівність порушувалась при відкиданні p_{n_1} ,

$(p_1 + \dots + p_{n_1}) - (q_1 + \dots + q_{m_1}) < k$ і
 нерівність порушувалась при
 відкиданні q_{m_1} .

$(p_1 + \dots + p_{n_1}) - (q_1 + \dots + q_{m_1}) + (p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2}) > k$
 коэф. p_i так, щоб при відки-
 данні p_{n_2} нерівність порушув.

Продовж. процес, поки не вибе-
 ремо всі члени з (3) і (4)

отр. ряд

$$(p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1}) - (q_1 + \dots + q_{m_1}) +$$

$$+ (p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2}) - \dots \quad (8)$$

Розв. част. $S_1, S_2, \dots, S_k, \dots$ — посл.

Можливо S_i відрізняється від k
 на p_{n_i} та q_{m_i}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n_i} = 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} q_{m_i} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = k. \quad \text{Враховуючи, що в}$$

зростає - менше відносно
 менше - їх суми. Різниця
 зростає - це перестав
 зростає до K . (1) 2

$$K = +\infty$$

Скільки наближень $p_1 + p_2 + \dots + p_{n_1} > 1$
 дані наближення $(p_1 + \dots + p_{n_1}) - q_1 + (p_{n_1+1} + \dots +$
 > 2 ;

Тоді $(p_1 + \dots + p_{n_1}) + q_1 + (p_{n_1+1} + \dots + p_{n_2}) - q_2 +$
 $+ (p_{n_2+1} + \dots + p_{n_3}) > 3 \dots$ Т.о. - розум
 число p збіг до $+\infty$.

Вмноження рядів.

Нехай дано (1) $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$
 (2) $b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$

Складемо таблицю з парних добутків

$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$	$\dots$	$a_n b_1$	$\dots$
$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$	$\dots$	$a_n b_2$	$\dots$
$a_1 b_3$	$a_2 b_3$	$a_3 b_3$	$\dots$	$a_n b_3$	$\dots$
$a_1 b_n$	$a_2 b_n$	$a_3 b_n$	$\dots$	$a_n b_n$	$\dots$

Озн. Добутком рядів (1) і (2) в розч.
 мннн кожні називатимемо ряд

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots$$

Теорема. Якщо ряди (1) і (2) - абсолютно збіжні, то добуток рядів (при будь-якій означенні) є збіжним, і сума добутку дорівнює добутку сум.

► Розглянемо ряди з абсолютних величин $|a_1| + \dots + |a_n| + \dots$ 1° - збіжні.
 $|b_1| + \dots + |b_n| + \dots$ 2° - збіжні.

Возьмемо довільне розміщення елементів $a_{n_1}b_{m_1} + a_{n_2}b_{m_2} + \dots + a_{n_k}b_{m_k} + \dots$ (3) - ряд, складений з елементів утвореної таблиці.

Треба показати, що $S = A \cdot B$, де S - сума ряду (3).

Для ряду (3) розглянемо 3° - ряд з абсолютних величин

$$|a_{n_1}b_{m_1}| + \dots + |a_{n_k}b_{m_k}| + \dots$$

Покажемо, що (3°) - збіжний. Тоді з зб. ряду (3°) випливатиме, що (3) - зб. абсолютно. Тоді при стабільно зміні ряду (3) і отримаємо, що $S = A \cdot B$.

Розглянемо $S_k^* = |a_{n_1}b_{m_1}| + \dots + |a_{n_k}b_{m_k}|$.
 з $n_1, n_2, \dots, n_k$ виберемо $\max$:

$$\max \{ n_1, n_2, \dots, n_k \} = p.$$

$$\max \{ m_1, m_2, \dots, m_k \} = s.$$

Тоді $S_k^* \leq (|a_1| + |a_2| + \dots + |a_p|)(|b_1| + \dots + |b_s|) \leq A^* \cdot B^*$, де A^*, B^* - ~~суми~~ суми рядів (1°) і (2°) .

Отже, S_k^* - обмежена $\rightarrow$ (за критері-

Дослідження збіжності рядів з довідковими знаками.

Маємо ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a_n - до-
відного знаку

Спочатку дослідимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, для
якого маємо ознаки порівняння,
схожості, мажоранта, Коші, Даламбера.
Якщо $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \text{зб.}$, то (1) - зб.; але
якщо $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \text{розб.}$, то (1) треба до-
сліджувати далі.

При дослідженні ряду (1*) з
Мажоранти та Даламбера, якщо
 $q > 1$, то (1*) - розб. Але тут
і ряд (1) - розб., бо $a_n \not\rightarrow 0$ при
 $n \rightarrow \infty$. (див. доведення ознак Коші і Даламбера)

Ознаки Абеля і Діріхле. Перетворення Абеля

Розв. $\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

$$B_1 = b_1$$

$$\rightarrow \begin{aligned} b_1 &= B_1 \\ b_2 &= B_2 - B_1 \end{aligned}$$

$$B_2 = b_1 + b_2$$

$$B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n \quad b_n = B_n - B_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i b_i &= a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = \\ &= a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + \dots + a_n (B_n - B_{n-1}) = \\ &= B_1 (a_1 - a_2) + B_2 (a_2 - a_3) + \dots + B_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + \\ &+ \cancel{B_n} B_n a_n = B_n a_n + \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_i - a_{i+1}) \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_n B_n + \sum_{i=1}^{n-1} B_i (a_i - a_{i+1})$$

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ (1)

Ознака Абеля

Міхалі 1° Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - збіжний
2° (a_n) - монотонна і обмежена.
Тоді ряд (1) зб.

Ознака Діріхле

Міхалі 1° Часті суми $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - обмежені:
 $\exists M \forall n \left| \sum_{k=1}^n b_k \right| \leq M$
2° (a_n) - монотонно прямує до нуля
 $a_n \rightarrow 0$
Тоді ряд (1) зб.

Доведення.

Доведемо ознаку Діріхле. Для цього покажемо, що для (1) має місце нерівність

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=1}^p a_{n+k} b_{n+k} = \sum_{k=1}^{p-1} B_{n+k} (a_{n+k} - a_{n+k+1}) + a_{n+p} B_{n+p}$$

за нерівності Коші

$$(*) = \left| \sum_{k=1}^p a_{n+k} b_{n+k} \right| \leq |a_{n+p} B_{n+p}| + \sum_{k=1}^{p-1} |B_{n+k}| |a_{n+k} - a_{n+k+1}|$$

$$B_{n+k} = b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+k} =$$

$$= (b_1 + \dots + b_{n+k}) - (b_1 + \dots + b_n)$$

$$|B_{n+k}| \leq |b_1 + \dots + b_{n+k}| + |b_1 + \dots + b_n| \leq 2M$$

~~тоді~~ ~~можна отримати~~

$$\text{Тоді } \left| \sum_{k=1}^p a_{n+k} b_{n+k} \right| \leq 2M \left(|a_{n+p}| + \sum_{k=1}^{p-1} |a_{n+k} - a_{n+k+1}| \right)$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} (a_{n+k} - a_{n+k+1}) = (a_{n+1} - a_{n+2}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p})$$

$$\text{Тоді } 2M(|a_{n+p}| + |\sum_{k=1}^p (a_{n+k} - a_{n+k-1})|) \leq \\ \leq 2M(2|a_{n+p}| + |a_{n+1}|)$$

$$a_n \geq 0 \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n > n_0$$

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{6M}$$

$$\text{Тоді } \left| \sum_{k=1}^p a_{n+k} b_{n+k} \right| < 2M \left(2 \frac{\varepsilon}{6M} + \frac{\varepsilon}{6M} \right) = \varepsilon.$$

Ознака Абеля є наслідком
згідно Діріхле. Справді, нехай
бук. умови ознаки істинні.
(a_n) - монот. і одн. $\rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n =$
 $= a$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ зб. $\rightarrow$ частк. суми збігаються
нї. Тоді $\text{рег } \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n =$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a) b_n + \sum_{n=1}^{\infty} a b_n$$

$\swarrow$ $\searrow$
 $a_n - a$ - монот. $\rightarrow$ збігається

збігається $\rightarrow 0$
згідно Діріхле.

Зауваження. ознака Лейбніца є
наслідком ознаки Діріхле. Справді,
за озн. Лейбніца, якщо $a_n \geq 0$,
то $\text{рег } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = (-1)^n$ $\rightarrow$ $\exists a > 0$ $\rightarrow$ зб. Діріхле.
Справді $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = (-1)^n$ $\rightarrow$ $\exists a > 0$ $\rightarrow$ зб. Діріхле.
а $a_n = a_n' \geq 0$ $\rightarrow$ $\exists a > 0$ $\rightarrow$ зб. Діріхле.
рег збігається.

Приклад. Розглянемо $\text{рег } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$.

Можна так: $\left| \frac{\sin nx}{n^p} \right| < \frac{1}{n^p} \rightarrow$ за озн.

порівняння $p > 1$ - рег збігається
 $p \leq 1$ - ?

Для $p \geq 1$ гармоническая прогрессия

является

$$\sum_{k=1}^n \sin k\alpha = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\sin \frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^n 2\sin \frac{\alpha}{2} \sin k\alpha = \frac{1}{2\sin \frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^n [\cos(k-\frac{1}{2})\alpha - \cos k\alpha]$$

$$= \frac{1}{2\sin \frac{\alpha}{2}} \sum_{k=1}^n [\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{3\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2} - \cos \frac{5\alpha}{2} + \dots + \cos \frac{(2n-1)\alpha}{2} - \cos n\alpha]$$

$$= \frac{1}{2\sin \frac{\alpha}{2}} [\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(2n+1)\alpha}{2}]$$

$$\text{Тогда } \left| \sum_{k=1}^n \sin k\alpha \right| \leq \left| \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{(2n+1)\alpha}{2}}{2\sin \frac{\alpha}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Откуда, } \left| \sum_{k=1}^n \sin k\alpha \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} > \frac{1}{n^p} \rightarrow 0 \text{ при}$$

$p > 0$. Таким образом, для гармонической прогрессии справедливо, что $p \geq 1$ - абсолютная сходимость, $p > 0$ - сходимость.

$$\text{Тогда } \begin{cases} p \geq 1 - \text{абсолютная сходимость} \\ p > 0 - \text{сходимость} \end{cases}$$

$$\text{То же самое для } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^p} ?$$

$$\frac{|\sin n\alpha|}{n^p} > \frac{\sin^2 \alpha n}{n^p} = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos 2n\alpha}{n^p} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^p} - \frac{1}{2} \frac{\cos 2n\alpha}{n^p}$$

$$\text{Откуда, } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^p} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n\alpha}{n^p}$$

$$0 < p < 1$$

$\text{ряд } \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2n}{n^p}$ - збіжний за Діріхле
 $\text{ряд } \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ - розбіжний. Тому
 $\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^p}$ - розб. $\rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^p}$

розб.
 Отже, для ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^p}$

$\begin{cases} p > 1 - \text{абсолютна збіжність} \\ 0 < p \leq 1 - \text{умовна збіжність} \end{cases}$

Також розглянути ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^p}$,
 отримаємо аналогічний результат.

Нескінченні добутки

Розглянемо послідовність $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ (p_n) .

Розгл. добутки:

$$P_1 = p_1$$

$$P_2 = p_1 \cdot p_2$$

$$P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

Отримаємо послідовність (P_n) .

Озн. Послідовності (p_n) і (P_n) визна-
 єють нескінченний добуток, який
 позначатимемо символом

$$\prod_{n=1}^{+\infty} p_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \cdot \dots$$

Якщо $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$, то це є значен-
 ня неск. добутку.

Озн. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P < \infty \wedge P \neq 0$, то
 годуюток зветься збіжними.

Приклад.

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \frac{1}{2}$$

Властивості неск. добутків.

(1) $P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n \cdot \dots$

(2) $P_{m+1} \cdot P_{m+2} \cdot \dots \cdot P_{m+k} \cdot \dots$ - замішок (1).

1.^о Якщо (1) - зб., то (2) - зб., і навпаки.

Зауваження: $P_n \neq 0$

Розв. $P_{m+k} = P_m \cdot P'_k$ $P'_k = P_k \cdot P_{k+1} \cdot \dots$

$$(1) - \text{зб.} \Leftrightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} P_{m+k} \Leftrightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} P'_k \Leftrightarrow (2) - \text{зб.}$$

2.^о Якщо (1) - зб., то $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 1$.

Справді, $P_n = \frac{P_n}{P_{n-1}}$ (1) - зб. $\rightarrow$

$$\rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1} \rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} =$$

$$= \frac{P}{P} = 1$$

Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln p_n = 1$ - необхідна умова збіжності рядку.

3°. Якщо (1) - зб., то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ - зб. і навпаки. Зауважимо, що якщо ряд зб., то p_n мають бути однієї з ознак (вважимо, що додатні).

$$P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

$$\ln P_n = \sum_{k=1}^n \ln p_k - \text{часткова сума ряду.}$$

$$\sum_{k=1}^n \ln p_k = S_n \quad P_n = e^{S_n}$$

Якщо (1) - зб. $\rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \rightarrow$
 $\rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \ln P_n \rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ зб.

Якщо $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln p_n$ - зб., то $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln P_n$
 $\rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} e^{S_n} \rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} P_n \rightarrow$ (1) - зб.

Ознаки збіжності неск. рядку.

1°. $p_n = 1 + a_n$
 Подіємо за властивістю 3, неск. рядку
 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ збігається
 тоді і лише тоді, коли $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ - зб.

Ознака 1. Якщо $a_n > 0$, то
 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n) - \text{зб.} \leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n - \text{зб.}$

► Порівняємо $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 + a_n)$ і $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1 \rightarrow$ якщо $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n)$ і $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ збігаються і розбігаються окремо.
(важливо, що маємо ряди з заг. чл. a_n).

2. Ознака 2 Якщо ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ - зб., і
ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ - зб., то неск. добуток (1) - зб.
 a_n - довільні.

Якщо a_n - зб. і a_n - з заг. чл. a_n , то
 $a_n^2 \leq a_n$ - там зб. зб. ?
до деякого n $a_n^2 < a_n$ (зб. a_n)
зб. деякого n)

~~Якщо ряд a_n - зб. і a_n - з заг. чл. a_n , то~~
Якщо ряд a_n - зб. і a_n - з заг. чл. a_n , то
буде і не збіжний.

$$\ln(1+a_n) = a_n - \frac{a_n^2}{2} + O(a_n^2)$$

$$-\ln(1+a_n) + a_n = \frac{a_n^2}{2} + O(a_n^2) \rightarrow$$

із збіжності $\sum a_n$ і $\sum a_n^2$ ви-
значає збіжність ряду

$$\sum \ln(1+a_n) \rightarrow (1) - \text{зб.}$$

Приклад $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$

Розв. ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}\right)$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \text{ зб. при}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} - \text{зб. при } p > \frac{1}{2}. \text{ Тому по-}$$

Функціональні послідовності і ряди.

Пропонуємо I та II семестру ми вивчали числові послідовності та ряди.

Для них розглянули поняття збіжності

Послідовність (x_n) збігається до a
 $\lim x_n = a \stackrel{\text{def}}{=} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n [n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon]$

Ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

з членами (a_n) і (A_n) - послідов. част. сум
 збігається до A , якщо $\lim A_n = A$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \stackrel{\text{def}}{=} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n [n > n_0 \Rightarrow |A_n - A| < \varepsilon]$$

В цьому розділі будемо вивчати
функціональні послідовності та ряди

Для їх характеристики будемо розглядати
 два поняття збіжності:

- поточкова збіжність (або проста збіжність)
- рівномірна збіжність (яка включає просту збіжність)

Нехай задано $\forall n \ f_n: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f_n(x) \in D(f_n) \subset \mathbb{R}^1$

Будемо позначати:

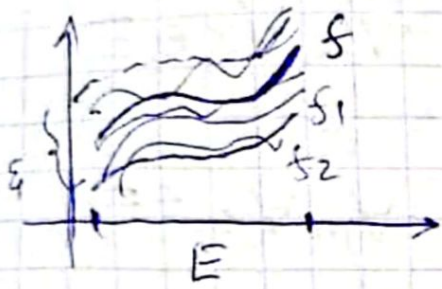
(f_n) - функц. послідовність, $(f_n(x))$ - числова послідов.

Означення. (f_n) - збігається в т. $(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} (f_n(x_0))$ - збігається.

Означ. (f_n) - збіг. на множес. $E \stackrel{\text{def}}{=}$

Означ. $\forall x \in E \ (f_n(x))$ - збігається.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \text{ на } E \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \in E \ \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$



Рівн. зб. означає, що якщо взяти $\forall \epsilon$, то існує n_0 , всі f_n знаходяться в епсилон-коридорі.

Пр-г. 1. $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ $E = [0, 1]$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. Чи збігається рівномірно?

$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2} \cdot \frac{1}{2n}$ ($\forall a, b \frac{2ab}{a^2+b^2} \leq 1$) $\rightarrow$

$\rightarrow f_n(x) \leq \frac{1}{2n} \quad \forall x \in E$. Тому $\forall \epsilon > 0 \exists n_0$

$\forall n \forall x [n > n_0 \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon]$

Знайдемо n_0 : $\frac{1}{2n} < \epsilon \rightarrow n > \frac{1}{2\epsilon} \rightarrow n_0 = \left\lceil \frac{1}{2\epsilon} \right\rceil$

2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $E = [0, 1]$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$.

~~(Зб. не рівномірно)~~

Для довільного n візьмемо $x = \frac{1}{n}$.

$f_n \not\rightarrow f$ (зб. не рівномірно) $\exists \epsilon > 0 \forall n_0 \exists n \exists x \in E [n > n_0 \wedge$

$|f_n(x) - f(x)| > \epsilon]$

Візьмемо: $\epsilon = \frac{1}{2} \quad \forall n_0 \exists n \exists x = \frac{1}{n} [n > n_0 \wedge$

$|f_n(x)| \geq \frac{1}{2}]$

Критерій Коші рівномірності збіжності послідовності.

(f_n) — зб. рівномірно на $E \iff \forall \epsilon > 0$

$\exists n_0 \forall m, n \forall x \in E [n > n_0 \wedge m > n_0 \rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon]$

$\Rightarrow f_n \Rightarrow f$ на $E \stackrel{\text{def}}{=} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \forall x \in E$
 $[n > n_0 \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}]$
 $\forall m \forall x \in E$

$[m > n_0 \rightarrow |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}]$

Отже, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\Leftarrow$ З умови випливає, що $\forall x \in E$

$(f_n(x))$ - фундаментальна $\rightarrow \forall x \in E$

$(f_n(x))$ - збіжна $\rightarrow f(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f_n(x)) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

Ми маємо, що $\forall n > n_0 \forall x \in E |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$,
 $\forall m > m_0$

Нехай $m \rightarrow \infty$. Тоді $|f_m(x) - f_n(x)| \rightarrow 0$
 $\rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$

Отже, $\forall n > n_0 \forall x \in E |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
 умова рівномірн. збіжності

Розв. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - функціональний ряд.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ зб. рівномірно до f на $E \stackrel{\text{def}}{=} f_n \Rightarrow f$ на E .

Критерій Коші рівномірної збіжності функц. ряду.

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ зб. рівномірно на $E \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \forall x \in E$
 $[n > n_0 \rightarrow |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon]$

випливає з кр. K . Значення носіїв

$u_n \Rightarrow f$ на $E \stackrel{\text{def}}{=} f_n \Rightarrow f$ на $E \xleftrightarrow{\text{кр. } K} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0$

Case $|S_n(x) - S_m(x)| = |\cancel{S_{n+1}(x)} + \dots + \cancel{S_m(x)}| =$
 $= |m = n+p| = |\cancel{S_{n+1}(x)} + \dots + \cancel{S_{n+p}(x)}| < \varepsilon$.

Означая Вейерштрасса. Глосай глос
fudu Σиn вейкк. уиови:
∞

Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - ряд рівномірно на Π

$$|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| \leq |u_{n+1}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)| \leq C_{n+1} + \dots + C_{n+p} < \varepsilon, \quad \forall x \in E.$$

Typ-9. 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan x}{n^2}$ $x \in \mathbb{R}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{u_n(x)}$

рівнолітньо.

Отже, цей функтор є рівно-
мірно зовсім відносно.

Ознаки Абеля і Діріхле

Розгл. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$, де u_n, v_n - ф-ції.

Ознака Абеля. Нехай для (1) вик.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ - рівном. зб. на E

2. (u_n) - монотонна і рівном. обмеж. на E $\exists M \forall x \in E |u_n(x)| \leq M$.
Тоді (1) зб. рівномірно на E .

Ознака Діріхле. Нехай для (1) вик.:

1. частк. суми $\sum_{n=1}^N v_n$ - рівном. обмеж.

$\exists L \forall x \in E \forall N \left| \sum_{n=1}^N v_n(x) \right| < L$

2. $(u_n(x))$ - монот., $u_n(x) \rightarrow 0$.

Тоді (1) - рівном. зб. на E .

Довед. - за тією ж схемою, що для числових рядів.

► Розгл. $\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=1}^p u_{n+k}(x) v_{n+k}(x) =$
 $= u_{n+p}(x) V_{n+p}(x) - \sum_{k=1}^{p-1} [u_{n+k+1}(x) - u_{n+k}(x)] V_{n+k}(x)$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq |u_{n+p}(x)| |V_{n+p}(x)| + \sum_{k=1}^{p-1} |u_{n+k+1}(x) - u_{n+k}(x)| |V_{n+k}(x)| \leq$$

$$\leq 2L (|u_{n+p}(x)| + \sum_{k=1}^{p-1} 1) =$$

$$= 2L (|u_{n+p}(x)| + | \sum_{k=1}^{p-1} 1 |) \leq 2L (2|u_{n+p}(x)| +$$

$$+ | \sum_{k=1}^{p-1} 1 |) < 2L \cdot 3\varepsilon. \quad (\text{з монот. } u_n \rightarrow 0)$$

Стр-гу 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

$\frac{1}{n} = u_n$, $\sin nx = v_n(x)$

н. u_n - монотонна $\searrow 0$ - рівномірно. Як в ознає
 Діріхле. 2. $|\sin x + \sin 2x + \dots + \sin Nx| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|} \rightarrow$
 $\rightarrow \frac{x}{2} \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$ $\frac{\alpha}{2} \leq x \leq 2\pi - \frac{\alpha}{2}$ - в цьому про-

міжкості даний ряд
 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan nx}{n^2 + x^2}$

зд. рівномірно.
 $\left| \frac{\arctan nx}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} = \frac{\pi}{2n^2}$

Властивості рівномірно збіжних
 послідовностей є рядів.

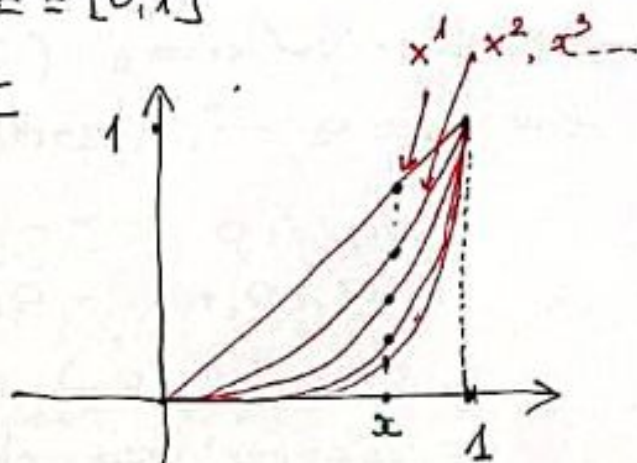
або

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(x, \varepsilon) \forall n$$

$$[n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Приклад. $f_n(x) = x^n$ $x \in E = [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1[\\ 1 & x = 1 \end{cases}$$



$$x \in [0, 1[\quad x^n \rightarrow 0$$

$f_n \rightarrow f$ поточково

Нехай (u_n) послідовність функцій

Розглядаємо ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

$$f_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad (f_n) - \text{послідовність част. сум}$$

Означ. Функц. ряд наз. збіжним на E $\stackrel{\text{def}}{=} (f_n) - \text{збіжна на } E$

Означ. Функц. ряд збіж. до f на E

$$\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \text{на } E$$

Ці поняття визначені лише в школі:

Приклад. геометрич. ряд

$$1 + x + \dots + x^n + \dots$$

$$f_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}$$

$$\text{Сума ряду} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} \quad \text{якщо } |x| < 1$$

Дослідження збіжності функціональних рядів.

Тут виникає запитання: Як знайти множину E на якій (в точках якої) збігається ряд?

Нам дано ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$. Для нього закористаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = q(x)$$

Розглянемо нерівність ~~$q(x) < 1$~~ $q(x) < 1$

Для цих x ряд $\sum |u_n(x)|$, отже, $\sum u_n(x)$ збіжний. Для x в яких $q(x) > 1$ — розбіжний! (Заче?)

Залишилося дослідити збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ для } q(x) = 1.$$

Аналогічно можна розглянути $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = q(x)$,

як в ознаці Даламбера.

Будуть розглянуті і інші способи дослідження функц. рядів.

Приклад:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n} x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cdot |x|}{2} = \frac{|x|}{2} = q(x)$$

$q(x) = \frac{|x|}{2} < 1$, $|x| < 2$, на яких $\sum$ ряд збіжний.

Виведемо в т. $|x| = 2$ $x = 2$, $x = -2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 2^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-2)^n}{2^n} - \text{ряди розбіжні.}$$

Висновок. Ряд збіжний на $[-2, 2]$

В інших точках $q(x) > 1$.

Рівномірна збіжність функціональних послідовностей те реді.

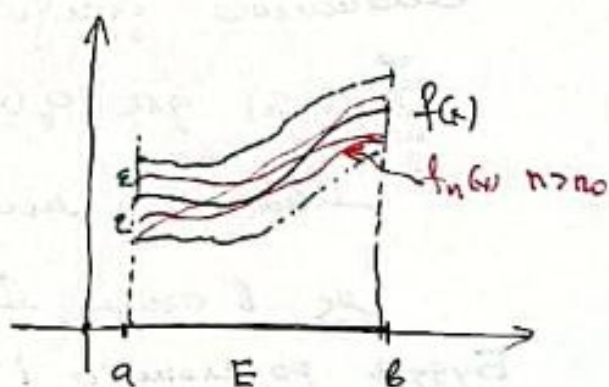
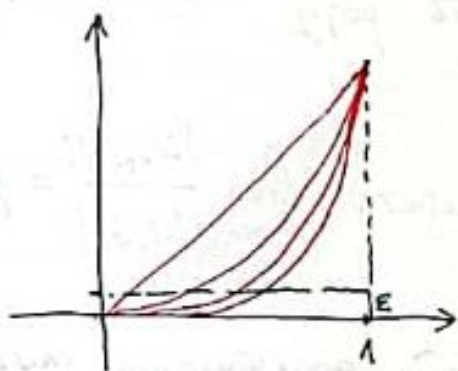
З прикладу збіжності функц. послідовності
 $f_n(x) = x^n$ бачимо що для різних $x \in [0, 1]$
 $x^n \rightarrow 0$ "по різкому", "не рівномірно"

Означення (точн. збіж.)

$$f_n \rightarrow f \underset{\text{на } E}{\text{ат}} \iff \forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 [n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

Означення (рбіан. збіж.)

$$f_n \rightarrow f \underset{\text{на } E}{\text{ат}} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \forall n_0 (\forall x \in E [n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon])$$



$$\forall x \in E \quad f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

Приклад. $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2} \quad E = [0, 1]$

$$\forall x \in [0, 1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + n^2 x^2} = 0 = f(x)$$

f_n по точково збігається до $f(x) \equiv 0$. Чи рівномірно?

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2 x^2} \cdot \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n} \quad \frac{2ab}{a^2 + b^2} < 1, \quad a \leq 1, \quad b = nx$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n_0 \forall x \in [0, 1] [n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{2nx}{1 + n^2 x^2} \right| < \frac{1}{2n} < \varepsilon]$$

" $\left[\frac{1}{2\varepsilon} \right]$ " $\frac{1}{2\varepsilon} < \frac{1}{2n} < n \quad n_0 = \left[\frac{1}{2\varepsilon} \right]$

Нехай $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $E = [0,1]$

$\forall x \in [0,1] \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^2} = 0 = f(x), f_n \rightarrow f$

Тут збіжність не рівномірна

$f_n \not\rightarrow f \stackrel{df}{=} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \exists n, x' \in E [n > n_0 \wedge |f_n(x') - f(x')| \geq \varepsilon]$
на E

В конкретному прикладі

$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} \forall n_0 \exists n, \exists x = \frac{1}{n} [n > n_0 \wedge |f_n(\frac{1}{n}) - f(x)| =$
 $= |\frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2(\frac{1}{n})^2} - 0| = \frac{1}{2} = \varepsilon]$

Виконується означення $f_n \not\rightarrow f$ на E .

Критерій Коші рівномірної збіжності
функціональної послідовності

Кр. Коші:

f_n - збіг. р-ноки $E \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m, \forall x \in E$
 $[n > n_0 \wedge m > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon]$

Але $\Rightarrow$ необхідно

$f_n \rightarrow f$ на $E \stackrel{df}{=} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \forall x \in E [n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}]$
 $\forall m \forall x \in E [m > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}]$

$\{ \Rightarrow \} \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \forall x \in E [n > n_0 \wedge m > n_0 \Rightarrow$

$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| < | \cdot | + | \cdot | < \varepsilon$

⊆ (достатність)

З умов випливає, що $\forall x \in E$ $(f_n(x))$ - послідов. чисел.

Тому $\forall x \in E$ $(f_n(x))$ - збіжна $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$

тобто $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

Доведемо, що $f_n \rightrightarrows f$ на E

З умов маємо $\forall n > n_0$
 $\forall m > n_0 \quad \forall x \in E \quad |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$

Віримо, що $m \rightarrow \infty$, отримаємо

$$\forall n > n_0 \quad \forall x \in E \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$$

Отже

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, \forall x \in E \quad [n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon]$$

$$= f_n \rightrightarrows f \text{ на } E$$

Критерій Коші рівномірної збіжності
 функціонального ряду

Крит. Коші $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ збіг. р-но на $E \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, p \quad \forall x \in E$
 $[n > n_0 \Rightarrow |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon]$

Довед.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ збіг. р-но на } E \stackrel{\text{def}}{=} (f_n) - \text{збіг. р-но, де } f_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$$

$$\xleftrightarrow{\text{к.к.}} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad \forall n, m \quad \forall x \in E \quad [n > n_0 \wedge m > n_0 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon]$$

$$\Rightarrow \text{ при } m = n + p. \quad |f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \dots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

Ознаки збіжності функціональних рядів

7

Ознака Вейєрштрасса

Нехай для ряду $\sum u_n$ викон. умови

$$\left. \begin{array}{l} 1. \forall x \in E \quad |u_n(x)| \leq C_n \\ 2. \sum C_n - \text{збіжен.} \end{array} \right\} \Rightarrow \sum u_n - \text{збіжен. р-но на } E$$

Дов.

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n - \text{збіж.} \xrightarrow{\text{кр. К}} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, p [n > n_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow |C_{n+1} + C_{n+2} + \dots + C_{n+p}| < \varepsilon] \\ \Downarrow$$

$$\forall x \in E \quad |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < |u_{n+1}(x)| + \dots + |u_{n+p}(x)| \leq \\ |C_{n+1} + C_{n+2} + \dots + C_{n+p}| < \varepsilon$$

Висновок: кр. Коші рівнав. збіж. ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x n}{n^2}$ $\left| \frac{\sin x n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x n}{n^2}$ - р. зб.

Ознаки Абеля і Діріхле

$$\text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \quad u_n(x), v_n(x) - \text{функції}$$

Ознака Абеля

$$\left. \begin{array}{l} 1. \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \text{рівном. зб. на } E \\ 2. (u_n) - \text{монот. і рбн. одбл.} \\ \exists M \forall x \in E [|u_n(x)| \leq M] \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n - \text{рбн. збіж. на } E$$

Ознака Діріхле

$$\left. \begin{array}{l} 1. \text{заст. суми ряду } \sum v_n - \text{р. одбл.} \\ \exists L \forall x \in E \left| \sum_{n=1}^N v_n(x) \right| < L \\ 2. (u_n) - \text{монот. і } u_n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n - \text{рбн. зб. на } E$$

II. Функціональні ряди

Збіжність функціональних послідовностей та рядів.

$$\forall n \quad f_n: R' \rightarrow R', \quad f_n(x)$$

(f_n) - функц. послідовність $(f_n(x))$ - по суті загальна послідовність.

Озн. (f_n) - зб. в т. $x_0 \} \stackrel{\text{def}}{=} (f_n(x_0))$ - зб.

Озн. (f_n) - зб. на множині $E \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \in E (f_n(x))$ - збіжна.

Означ. $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ на $E \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \in E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.
Познач.: $f_n \rightarrow f$ на E .

$$f_n(x) = x^n \quad E = [0, 1]$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Множина збіжності. E - мн. збіжності функц. послідовності $(f_n) \} \stackrel{\text{def}}{=} \forall x \in E (f_n(x))$ - зб.

$$f_n(x) = x^n \quad E = [-1, 1]$$

Розгн. ряд (u_n) - послідовність чл-ів.
 $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n. (1)$

Значення збіжності
 $S_n = u_1 + \dots + u_n$

послідовністю
 (f_n) - посл.

заст. сума.

Озн. 1 Ряд (1) зб. на мн. E до f -ї $\{ \stackrel{\text{def}}{=} \}$
 $S_n \rightarrow f$ на E

Пр-г. $1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$

$S_n(x) = 1 + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \quad |x| < 1$

Можна мати ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Розв. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = q(x)$. Розв'язуючи нерів-

ність $q(x) < 1$ для x , що задовільн. нерів-

ність, ряд зб.

$q(x) < 1$

для всіх x

ряд розб.

$q(x) = 1$

для цих x

ряд треба до-

слідн. дані

Так само

можна користуватись озна-

кою Даламбера.

можна

користуватись озна-

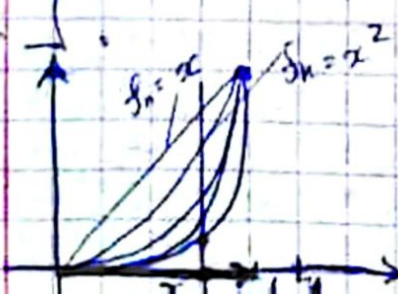
кою Даламбера.

**Рівномірна збіжність функцій -
 ознак послідовностей
 і рядів.**

Озн. $S_n \rightarrow f$ на $E \stackrel{\text{def}}{=} \{ \forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \rightarrow |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon \}$

Озн. (рівномірн. збіжність)

$S_n \Rightarrow f$ на $E \stackrel{\text{def}}{=} \{ \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall x \in E \rightarrow |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon \}$



$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $f_n(x) = x^n$ - збіжна.
 чи рівномірно збіжна? Ні

Властивості рівномірно збіжних послідовностей і рядів

Для функціональних послідовностей та рядів цікавим будуть такі питання.

1. Якщо $\forall n$ $f_n(x)$ $x \in E$ є неперервними, то чи збіжна ф-іє $f(x) = \lim f_n(x)$ є неперервною?

Зведемо ф-ію $f_n(x) = x^n$ $x \in [0, 1]$

2. Якщо $\forall n$ $u_n(x)$ $x \in E$ неперервні, то чи сума ряду $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ є неперервною?

3. Чи мають місце рівності:

$$a) \lim_{x \rightarrow a} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow a} u_n(x)$$

$$b) \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

$$b). \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx ?$$

Забудемо, що для скінченних сум властивості 2, 3 а), б), в) виконуються.

В теоремах про властивості функціональних послідовностей та рядів важливу роль відіграє рівномірне збіжність

► Позв. $\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx = (*)$

$f_n \rightarrow f$ на $[a, b] \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall x \in [a, b] \forall n$
 $[n > n_0 \rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$

Тому $(*) < \left| \int_a^b \varepsilon dx \right| = \varepsilon(b-a) \quad n > n_0$, что и
 нужно было доказать, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Теорема Пусть $\forall n$ члн - функции на $[a, b]$,

1. $\forall n$ члн - непрер. на $[a, b]$
2. $\sum$ члн - гд. рядом. до f

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=1}^n u_k(x) dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx$
 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx$
 (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=1}^n u_k(x) dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) dx$
 (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx$

► $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$

$f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$ на (1) zastosowana dove-
 жена теорема

4. Теорема про почленне дифференцирування
 рядов.

Теор. Пусть u_n - функц. на $[a, b]$

1. u_n - дифер. на $[a, b] \forall n$
2. $\exists x_0 \in [a, b] : \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = f(x_0)$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ - гд. рядом.

$\rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$

► Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = g(x)$. Позв. $\int_a^b g(x) dx =$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n'(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = f(x) - f(x_0)$

Врачуємо : $g(x) -$ непрер. $\rightarrow \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x g(x) dx =$
 $= (f(x) - f(x_0))' = f'(x) = g(x)$

Одновременно, $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n'(x) = f'(x) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]'$

Пр-р. $f_n(x) = x^n$ $\forall n$ f_n - непрерыв., аме
 равномерно $g(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0 & x \neq 1 \end{cases}$ - нег-

равна (до $f_n \rightarrow f$)

Задача. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$

1. Показать, что $f(x)$ - непрерыв;
 2. $f(x)$ - гурер.

1. Сначала, $u_n = \frac{\cos nx}{n^3}$ - непрерыв.

Теперь $|u_n(x)| = \left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} \rightarrow$ за окр. Вейерш.

$u_n(x)$ - равн. зб.

2. Прогурер. Ред: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ - вим жов зб.

равномерно $\rightarrow f(x)$ - гурер.
 То похидна непрерыв.? Так. Дав. 1.

1° Непрерывность градиентной функции та суммару

2

Теорема (про непрерыв. зран. ф-ий)

Нехай посл. зран. (f_n) визн. на E

- 1) $\forall n \ f_n$ непер. на E
 - 2) $f_n \Rightarrow f$ на E
- $\Rightarrow f$
- непер. на
- E

Дов. Нехай $\forall f_n$ непер. т. $x_0 \in E$

$\forall \varepsilon > 0$, вибачемо $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$

$$\textcircled{1} \ f_n \Rightarrow f \text{ на } E \Rightarrow \varepsilon_1 > 0 \exists n_0 \forall n \forall x \in E$$

$$[n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1]$$

Для $n = n_0 + 1 \ f_{n_0+1}$ - непер. в т. $x_0 \in E \Rightarrow$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \varepsilon_1 > 0 \exists \delta \forall x \in E [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(x_0)| < \varepsilon_1]$$

Тоді непер. $f(x)$ в т. x_0

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0+1}(x) + f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(x_0) + f_{n_0+1}(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f_{n_0+1}(x)| + |f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(x_0)| + |f_{n_0+1}(x_0) - f(x_0)| <$$

$$\overset{\varepsilon_1}{\underbrace{\quad}} \exists (1), \delta_0 \text{ т.т. } n_0+1 > n_0$$

$$\overset{\varepsilon_1}{\underbrace{\quad}} \exists (2), \delta_0 |x - x_0| < \delta$$

$$\overset{\varepsilon_1}{\underbrace{\quad}} \exists \textcircled{1}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

Отримали $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$
 Тоді f непер. в т. $x_0 \in E$

Теорема (про непрерыв. сумм ряду)

Нехай 1) $\forall n \ u_n(x)$ непер. на E

2) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ зб'їт. р'б.

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x) - \text{непер. на } E$$

Довед.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ зб'їт. р'б.} \Rightarrow f_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x), \ f_n(x) \Rightarrow f(x) \left\{ \begin{array}{l} \text{з непер. теор} \\ \Rightarrow f_n(x) - \text{непер} \\ f(x) - \text{непер.} \end{array} \right.$$

Теорема Лібі

I Для послідовності:

Нехай $\forall n$ f_n визначені на $[a, b]$

1. $\forall n$ f_n непер. на $[a, b]$

2. f_n монот. по n

3. $f_n \rightarrow f$ збіг. на $[a, b]$, f -непер

$$\left. \begin{array}{l} 1. \\ 2. \\ 3. \end{array} \right\} \Rightarrow f_n \rightrightarrows f \text{ на } [a, b]$$

II Для рядів

Нехай $\forall n$ u_n - визн. на $[a, b]$

1. $\forall n$ u_n -непер. $[a, b]$

2. $\forall n \forall x \in [a, b] \quad u_n(x) \geq 0$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x)$ непер. $[a, b]$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \\ 2. \\ 3. \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ збіг. р'бн. на } E$$

Друга теорема є наслідком першої. Це випливає з того, що $f_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x)$, і т.д.

Теорема про граничний перехід

Теорема. Нехай $\forall n$ u_n - визначені на E

1. $\forall n \quad \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = C_n \quad x_0 \in E$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - збіг. р'бн. до f на E

1). $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ - збіжн.

2). $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) =$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \end{aligned}$$

Інтегрування функціональної послідовності і ряду.

Теорема. Нехай $\forall n$ f_n - визначені на $[a, b]$

1. $\forall n$ f_n -непер. на $[a, b]$

2. $f_n \rightrightarrows f$ на $[a, b]$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \\ 2. \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

Дов. Розглянемо різницю

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)] dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx$$

З рібн. збіжн. $f_n \rightarrow f$ на $[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \forall x \in [a, b]$
 $[n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$

Тому $\int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a)$

Маємо $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| < \varepsilon(b-a)$,

тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Теорема (про подання інтегр. функц. рядів)

Нехай $\forall n$ u_n - безп. на $[a, b]$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \forall n \ u_n \text{ - непер. на } [a, b] \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ збіг. р-но на } [a, b] \\ \text{то } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

Доведення. $f_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=1}^n u_k(x) dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b u_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx \end{aligned}$$

Тут використали теорему про збіжність рядів.

Теорема про поглинання диференціювання

Теорема. Нехай $\forall n$ u_n визначені на $[a, b]$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \forall n \ u_n - \text{диференц. на } [a, b], \underline{u'_n(x) - \text{непер.}} \\ 2) \exists x_0 \in [a, b] \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = f(x_0) \\ \quad \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = f'(x), \text{ пер. зв'язк. на } [a, b] \\ 3) \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) - \text{зв'яз. р'вн. на } [a, b] \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

Довед. Показуємо $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = g(x)$. З попередньої теореми

$$\text{немає} \int_{x_0}^x g(x) dx = \int_{x_0}^x \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^x u'_n(x) dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

З неперв. $u'_n(x)$ і р'вн. зв'язкості $g(x)$ - непер. р-іє.

$$\begin{aligned} \text{Тоді} \quad \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x g(x) dx &= \frac{d}{dx} (f(x) - f(x_0)) \\ &\parallel \\ g(x) &= f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' \\ &\parallel \\ \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' \end{aligned}$$

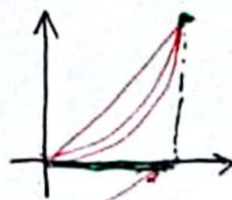
Приклади.

① $f_n(x) = x^n$ непер. $[0, 1]$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x=1 \\ 0 & x \in [0, 1[\end{cases}$ - розривна
" $f(x)$

Осцилює, $x^n \not\rightarrow f(x)$
зв'язкості не р'вносильна

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall n_0 \ \exists n \ \exists x \ [n > n_0 \wedge |x^n - f(x)| \geq \varepsilon]$$

$\exists \varepsilon = \frac{1}{2}$ Візьмемо где $n > n_0$ $x' = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$



2. Довеести, що $f(x)$ - непер. і $f'(x)$ - непер.

⑥

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$$

Дов. f - непер. $\checkmark$ $u_n(x) = \frac{\cos nx}{n^3}$ - непер.

$\checkmark$ $\sum u_n(x)$ - збіг. р-но на $\mathbb{R}$ за ознакою Вейєрштрасса

$$\left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3} \quad \sum \frac{1}{n^3} - \text{збіг.}$$

Теорема u_n - непер. $\left. \begin{array}{l} \sum u_n - \text{збіг. р-но} \end{array} \right\} \Rightarrow f(x) - \text{непер.}$

Дов. $f'(x)$ - непер.

$\checkmark$ $\sum u_n(x)$ - збіг.

$\checkmark$ $u'_n(x) = -\frac{\sin nx}{n^2}$ - непер.

$\checkmark$ $\sum u'_n(x) = -\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ - збіг. р-но за Вейєрштрассом.

Тоді $f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, $f'(x)$ - непер. зведення
як в попередн. п. виконується

Властивості рівномірно збіжних
похідних і рядів.

1. Неперервність граничної функції і суми ряду

Теорема Нехай $\epsilon (S_n)$ на E ,

1. $\forall n$ S_n - непер. в $x_0 \in E$.
 2. $(S_n) \Rightarrow f$ на E .
- $\} \rightarrow f$
- непер. в т.
- x_0

► Задамо $\forall \epsilon > 0$. Візьмемо $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{3}$.

$$S_n \Rightarrow f \text{ на } E \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n, \forall x \in E \\ [n > n_0 \rightarrow |S_n(x) - f(x)| < \epsilon_1]$$

$$\text{Візьмемо } n = n_0 + 1. \quad S_{n_0+1} - \text{непер. в } x_0 \in E \Rightarrow \\ \epsilon_1 \exists \delta \forall x \in E [|x - x_0| < \delta \rightarrow |S_{n_0+1}(x) - S_{n_0+1}(x_0)| < \epsilon_1]$$

$\downarrow \frac{\epsilon}{3}$ за вибором $n > n_0$

$$\text{Розглянемо } |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - S_{n_0+1}(x) + S_{n_0+1}(x) - \\ - S_{n_0+1}(x_0) + S_{n_0+1}(x_0) - f(x_0)| \leq | | + | | + | |$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \quad (\text{взявши } |x - x_0| < \delta)$$

Тому $\forall \epsilon > 0 \exists \delta \forall x [|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon]$
Отже f - непер. в x_0 . ►

Теорема (про неперервність суми ряду) Нехай
р-я $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ визначена на E , $\forall n$ u_n - непер.
в x_0 , $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - рівном. зб. до f на E .

Тоді f - непер. в x_0 .

► Справді, розв. $S_n = u_1 + \dots + u_n$ з рівно-
мірн. зб. ряду маємо $S_n \Rightarrow f$ на E

З непер. u_n маємо S_n непер. в τ . то $\forall n$
 $\rightarrow f$ - непер. (з непер. τ -ли) $\blacktriangleleft$

Теорема Діні. Нехай $\forall n$ S_n - визначені на $[a, b]$.
 $\left. \begin{array}{l} 1. \forall n \ S_n \text{ - непер. на } [a, b] \\ 2. S_n \text{ - монот. по } n \\ 3. S_n \text{ зб. до } f \text{ - непер. на } [a, b] \end{array} \right\} \rightarrow S_n \Rightarrow f \text{ на } [a, b]$

Теорема Діні (для рядів). Нехай $\forall n$ u_n - визначені на $[a, b]$ і
 $\left. \begin{array}{l} 1. \forall n \ u_n \text{ - непер. на } [a, b] \\ 2. \forall n \ \forall x \in [a, b] \ u_n(x) \geq 0 \\ 3. \sum u_n = f \text{ - непер. на } [a, b] \end{array} \right\} \rightarrow \sum u_n \text{ зб. рівномірно до } f \text{ на } [a, b]$

u_n - непер. $\rightarrow S_n = u_1 + \dots + u_n$ - непер.
 $u_n(x) \geq 0 \rightarrow S_{n+1}(x) \geq S_n(x) \rightarrow S_n$ - монот.
 $\sum u_n$ зб. до $f \Rightarrow S_n$ зб. до f .

$S_n \Rightarrow f \Rightarrow \sum u_n$ - зб. рівномірно до f .

2. Теорема про граничний перехід.
 Нехай $\forall n$ u_n - визначені на E , і
 $\left. \begin{array}{l} 1. \forall n \ \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = C_n \ x_0 \in E \\ 2. \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ - зб. рівномірно до } S \text{ на } E \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \text{ - зб.} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \\ = \lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n = C \\ (\sum \lim u_n(x) = \lim \sum u_n(x)) \end{array}$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - зб. рівномірно до S на E $\rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$
 $\forall n, p \ \forall x \in E \ [n > n_0 \rightarrow |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{4}]$
 $\forall x \in E \ |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$

Розв. $\lim_{x \rightarrow x_0} |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| = |C_{n+1} + \dots + C_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{4}$
 $< \frac{\varepsilon}{3} \rightarrow$ за кр. Коші для ряду $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} C_n$ - зб.

$$|f(x) - C| = |S_n(x) + z_n(x) - C_n - z_n| \leq \\ \leq |S_n(x) - C_n| + |z_n(x)| + |z_n| = \\ = \left| \sum_{k=1}^n [z_k(x) - C_k] \right| + |z_n(x)| + |z_n|$$

$$z_n(x) = f(x) - S_n(x), \quad z_n = C - C_n.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - C) = 0 = \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - C| < \varepsilon]$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_n - \delta. \quad \text{где } \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{найдем } n' : \\ \forall n [n > n' \rightarrow |C_n - C| < \frac{\varepsilon}{3}]$$

$$z_n - \delta. \quad \text{приведем } S_n \rightarrow f \rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\exists n'' \quad \forall n \quad \forall x \in E [n > n'' \rightarrow |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1] \\ n_0 = \max \{ n', n'' \}$$

$$\text{где } \varepsilon \quad \exists \delta \quad \forall x \in E \quad |x - x_0| < \delta \rightarrow |z_n(x) - C_n| < \frac{\varepsilon}{3n} \\ (n - \text{зафиксировано, } n > n_0)$$

$$\text{Отсюда, } \sum_{k=1}^n [z_k(x) - C_k] < \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{3n} \approx \frac{\varepsilon}{3}.$$

$$\text{Отсюда, если } |x - x_0| < \delta, \text{ то } |f(x) - C| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \blacktriangleleft$$

3. Интегрирование ряда (поэлементное интегрирование ряда).

Теорема. Пусть $\forall n$ S_n - непрерывна на $[a, b]$

$$\left. \begin{array}{l} 1. \forall n \ S_n - \text{непр. на } [a, b] \\ 2. S_n \rightarrow S \text{ на } [a, b] \end{array} \right\} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx = \\ = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Степеневі ряди

Будемо вивчати застосовні випадки функціональних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \text{при} \quad u_n(x) = a_{n-1} (x-x_0)^{n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,$$

зокрема при $x_0=0$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n =$ (1)

$$= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + \dots$$

1. Лінійна збіжність

Розглянемо степеневі ряди

$$\sum \frac{x^n}{n!} \quad (1) \quad ; \quad \sum n! x^n \quad (2) \quad , \quad \sum x^n \quad (3) \quad , \quad \sum \frac{x^n}{n} \quad (4) \quad , \quad \sum \frac{x^n}{n^2} \quad (5)$$

За ознак Даламбера

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n+1} = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ряд збіжний.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)x = \infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus 0$ ряд розбіжний.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x| < 1$, зб. $[-1, 1]$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x| < 1$, зб. $[-1, 1]$

(5) зб. $[-1, 1]$, осцилює $\sum \frac{1}{n^2}$ - збіжний.

Лінійна збіжність може бути глобальною

(При $|x| < 1$, але разг. $x=1, x=-1$)
 $|x| > 1$ - ряд розбіжний.)

ознаку Коші. $\blacktriangle$

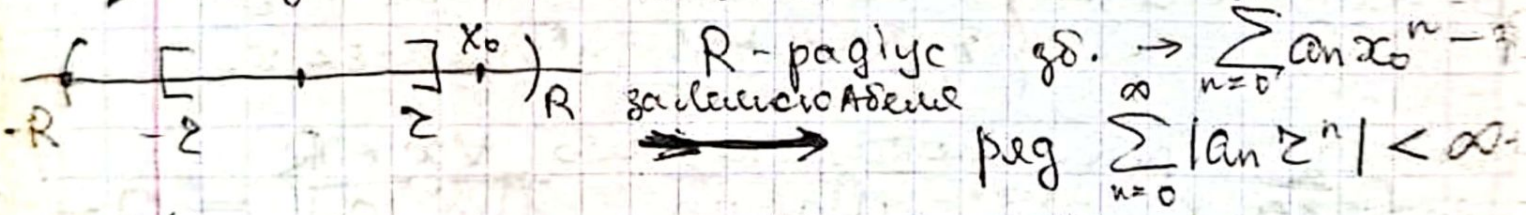
Зуваж. 1. Не доведено, що $|x| \lim(...) = \lim(...) \cdot |x|$;
 2. Практично при дослідженні степеневих рядів зручно шукати $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, а також $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$, якщо вона існує, то вона рівна $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Отже, $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$
 $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Властивості степеневих рядів.

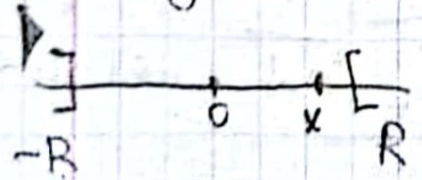
1. Нехай R - радіус зб. степеневих рядів (1).
 тоді $\forall z: [-r, r] \subset]-R, R[$ ряд (1) рівномірно на $[-r, r]$.

Візьмемо $|x_0| \in]r, R[$



$\rightarrow \forall x \in [-r, r]$ $|a_n x^n| \leq |a_n z^n|$ - за ел. Вейерштрасса $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ зб. рівномірно на $[-r, r]$. $\blacktriangle$

2. Сума степеневих рядів є непер. ф-цією в інтервалі збіжності.



Візьмемо $\forall x \in]-R, R[$ для неї $\exists z: |x| < |z| < R$.

За доведенням на $[-z, z]$ ряд зб. рівномірно, а отже, і в т. x . $\blacktriangle$

Зуваж. Неперервність - локальна властивість.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

$$R \quad]-R; R[$$

$$1. \quad \forall z \in R: \text{на }]-z; z[\subset]-R; R[\quad (1) - \text{жб.}$$

$$2. \quad \text{на }]-R; R[\quad f(x) - \text{непер.}$$

3. В інтервалі збіжності степеневий ряд можна похідно диференціювати.

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

► Доведемо, що R^* - радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ рівен R .

$$\text{За теор. Коші-Адамара, } R^* = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |a_n|}} =$$

$$= \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{1} = R.$$

$$\text{(Використавши, що } \{ \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n)$$

II крок. Візьмемо $\forall x \in]-R; R[$ виберемо $z_0 \in \mathbb{Z}$, так: $|x| < z_0 < z_1 < R$.

$$\text{Розв. } |n a_n x^{n-1}| \leq n |a_n| |z_0|^{n-1} =$$

$$= n |a_n z_1^{n-1}| \left| \frac{z_0}{z_1} \right|^{n-1}. \quad \text{Ряд } \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \text{жб.}$$

$$\text{отже, } a_n z^n - \text{обмежен.} \rightarrow \exists M |a_n z^n| \leq M.$$

$$\text{Тоді } n |a_n z_1^{n-1}| \left| \frac{z_0}{z_1} \right|^{n-1} < n M_1 \left| \frac{z_0}{z_1} \right|^{n-1} =$$

$$= n M_1 q^{n-1} \quad q < 1. \quad M_1 = \frac{M}{z}$$

$$\text{Розв. } \sum_{n=0}^{\infty} n q^{n-1} - \text{жб. за всякою } M_1$$

Ми покажемо, що для $x \in]-R; R[$ функція $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є зб. Також показано, що на $[-z_0; z_0]$ функція $f(x)$ є зб. рівномірно за ознакою Вейерштрасса.

Візьмемо $\forall x \in]-R; R[$, для якого знайдемо z_0 : $x \in]-z_0; z_0[$ і $z_0 \in]-R; R[$. Тоді на $[-z_0; z_0]$ функція $f(x)$ є зб. рівномірно за теор. про зб. функцій. Тоді, оскільки $f(x)$ є зб. рівномірно на $[-z_0; z_0]$, то функція $f(x)$ є зб. рівномірно на $[-z_0; z_0]$.

Теор. про зб. функцій.

4. Показання інтегрування.

Степеневий ряд можна поелементно інтегрувати в інтервалі збіжності. Це випливає з властивості 1. - і теор. про показання інтегрування функцій.

Розв. $\forall x \in]-R; R[$ функція $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ є зб. рівномірно на $[-a, a]$.

Тоді

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n x^n dx.$$

$$a=0: \int_0^x a_n x^n dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

Лема Абеля. Нехай $\text{res}(1)$ збігається в т. x_0 ②

Тоді $\forall x$ $|x| < |x_0|$ (1) збігається абсолютно
т.б. маємо, що $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - збіжений

Візьмемо $\forall x$ $|x| < |x_0|$. Тоді

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \quad q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$$

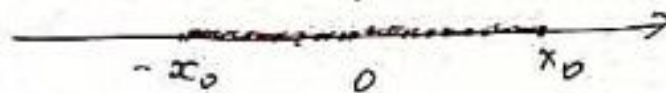
$$\text{Зі збіжності: } \sum a_n x_0^n \Rightarrow \lim a_n x_0^n = 0 \Rightarrow$$

$$(a_n x_0^n) - \text{о.м.} \Rightarrow \exists M \forall n |a_n x_0^n| \leq M$$

$$\text{Отже, } |a_n x^n| \leq M q^n, \quad q < 1$$

$$\text{З збіжн. } \sum q^n \Rightarrow \text{зв. } \sum M q^n \Rightarrow \text{зв. } \sum |a_n x^n|$$

З лемми випливає, що множина збіжності
стислого ряду буде інтервал, відрізок,
або півінтервал



Радіус збіжності

Розглянемо множину $\{ |x| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \text{збіжн.} \}$

$$\text{Означ. } R \stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ |x| \mid \sum a_n x^n - \text{збіжн.} \}$$

" E

R - радіус збіжності

Теорема. Нехай R - радіус збіжності ряду (1)
Тоді

$$1. \text{ При } R < \infty \quad \begin{array}{ll} \forall x \quad |x| < R & \text{ряд зв.} \\ \forall x \quad |x| > R & \text{ряд розв.} \end{array}$$

$$2. \text{ При } R = +\infty \quad \forall x \quad \text{ряд збіжн.}$$

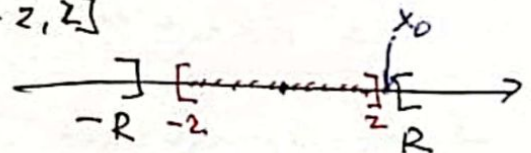
Забвешення.

1. Ми в доведенні користувалися ширшою ознакою Коші
2. Ми користувалися властивостями $\lim$
3. Практично часто користувалося.

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Властивості степеневих ряду

1. Нехай R -радіус зб. степеневому ряду (1),
тоді $\forall z \in]-R, R[$ ряд (1)
зб. рівномірно на $[-z, z]$



Дов. Нехай $|x_0| \in]z, R[$

$$\sum a_n x_0^n \text{ збігається} \Rightarrow \sum |a_n z^n| < \infty \quad (\text{Лема Абеля})$$

$$\text{Тепер. } \forall x \in [-z, z] \quad |a_n x^n| \leq |a_n z^n|$$

З ознаки Вейєрштрасса $\sum a_n x^n$ - зб. р-но на $[-z, z]$

2. Сума ряду $\sum a_n x^n = f(x)$ є неперервною функцією в інтервалі $]-R, R[$

Дов. $\forall x \in]-R, R[$



$$\exists z \quad |x| < |z| < R$$

За довед. на $[-z, z]$ - зб. рівномірно $\Rightarrow$
сума ряду непер. ф-ія на $[-z, z]$ і в т.ч.

Зав. Неперервність логарифма в точці



3. В інтервалі збіжності степеняного ряду
 $I =]-R, R[$ можна степен. ряд покласти диференціювати
(тобто зма ряду дифер. $\varphi(z)$) і

$$f'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

Доведення. Покажемо, що радіус збіжності дифер. ряду не зменшився R (радіус зб. $\rho(1)$)

Нехай $x \in]-R, R[$. Виберемо $|x| < z_0 < z_1 < R$



Тоді

$$|n a_n x^{n-1}| < n |a_n| |z_0|^{n-1} = n |a_n z_1^{n-1}| \left| \frac{z_0}{z_1} \right|^{n-1}$$

$$\sum a_n z^n = z_0 \Rightarrow \exists M \sqrt[n]{|a_n z^{n-1}|} \leq M$$

Тоді

$$|n a_n x^{n-1}| \leq n M_1 \left| \frac{z_0}{z_1} \right|^{n-1} = n M_2 q^{n-1} \quad q < 1$$

$$\sum n q^{n-1} \text{ - збіжний за Коші} \quad \sqrt[n]{n q^n} = \sqrt[n]{n} q \rightarrow q < 1$$

Покажемо $\forall x \in]-R, R[$ ряд $\sum n a_n x^{n-1}$ - збіжн.

$$\text{а також} \quad \sum n |a_n| |z_0|^{n-1} \leq \sum n M q^{n-1}$$

це означає, що на $[-z_0, z_0]$ дифер. ряд збігається рівномірно

Тоді $\forall x \in]-R, R[\exists z_0 \ x \in [-z_0, z_0]$

в якій можна помістити функ.

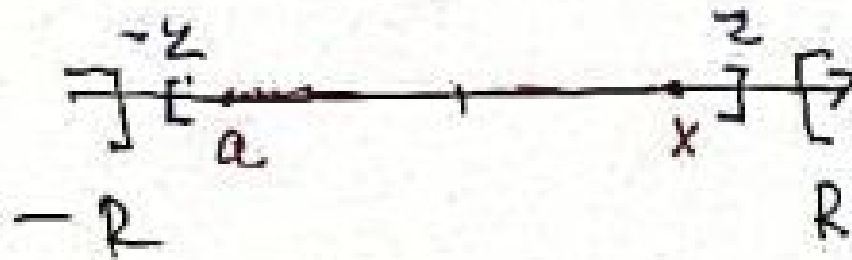
6

Покажем интерпретацию степенного ряда

$\forall x \in]-R, R[$. разложим $[a, x] \subset]-R, R[$
 на $[a, x]$ конеч. ч. з.ч. р.б.о.с.р.о.

тогда

$$\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n x^n dx$$



Степеневі ряди

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $u_n(x) = a_{n-1}(x-x_0)^n$, (a_n) - числова послідовність, $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ - степеневий ряд.
Будемо розглядати випадок - $x_0 = 0$.

1. Множина збіжності

Розглянемо степеневий ряд (1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ якщо $x = 0$, то (1) - зб.

Пр - г. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ Озн. Даламбер: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}/(n+1)!}{x^n/n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0$
Тому $\forall x \in \mathbb{R}$ ряд зб.

$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ Озн. Даламбер: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)x$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)x = \infty \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} \cdot n = |x|.$$

Отже, для $|x| < 1$ ряд зб. для $x = \pm 1$ треба досліджувати, $|x| > 1$ - розб. Але при $x = 1$ ряд розб., при $x = -1$ зб. Отже, область збіжності: $[-1; 1[$.

Лема Фейє. Нехай (1) - зб. в т. x_0 . Тоді

$\forall x: |x| < |x_0|$ (1) збігається абсолютно.

Дано, що (2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ - зб. Визначимо

$\forall x: |x| < |x_0|$. Розв. $|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$

із зб. ряду (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n x_0^n| = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \exists M \forall n |a_n x_0^n| \leq M$

Отже, $|a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = M q^n$.

$q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ - зб. $\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ - зб.

За ет. порівняння

Отже, множиною збіжності може бути інтервал, півінтервал, або всі дійсн.

Пр-г. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, - зб. на $] -1, 1[$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ - зб. на $[-1, 1[$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{x^n}{n^2}} = |x|$ - зб. на $[-1, 1]$.

Розвизначимо $\{ |x| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ - зб. } \} \stackrel{E}{=} R$

Очи $\sup_{x \in R} \{ |x| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ - зб. } \} = R$ R зветься радіусом збіжності (1).

Теорема Нехай R - радіус зб. (1). Тоді
1. $R < \infty$ для $|x| < R$, для $|x| > R$ а) - розб.

2. Якщо $R = +\infty$, то $\forall x$ (1) - зв.
 ▶ Нехай $|x| < R$. Тоді за означ. $\sup$,
 $\exists |x_0| \in E$ $|x| < |x_0| < R$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \text{зв.}$

Тоді за леммою Абеля $\text{рег} \sum a_n x^n = \text{зв.}$

Нехай $|x| > R$. Якщо б $\text{рег} \sum a_n x^n = \text{зв.}$, то
 $x - \varepsilon = \varepsilon + R \in E$, що протипрично до означення
 $(\varepsilon = \frac{R - |x|}{2})$ $\sup$.

2. - вивчає з означення E . ◀

Теорема Коші - Адамара Нехай

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$. Тоді 1. $L = 0 \rightarrow R = \infty$
 2. $L = \infty \rightarrow R = 0$
 3. $0 < L < \infty \rightarrow R = \frac{1}{L}$.

▶ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1. \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 x_n < a + \varepsilon \\ 2. \forall \varepsilon > 0 \forall n' \exists n'' > n' a - \varepsilon < x_{n''} \end{cases}$

1. $L = 0$ Треба показати, що $\forall x \in \mathbb{R}$
 $\text{рег} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \text{зв.}$ Улаємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0 =$
 (зв'язування: жива і праба на x)
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = 0 \rightarrow$ за означ. Коші, рег
 $(1) - \text{зв.}$

3. Якщо $0 < L < \infty$ $\forall |x| < \frac{1}{L} = R$ Розв.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot L < 1 \rightarrow$
 $\rightarrow \text{рег} \text{ зв.}$

$|x| > \frac{1}{L} \rightarrow$ (аналогічно) $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1 \rightarrow$ не
 розбіжний.

Випадок $L = \infty$ веде аналогічно - застос.

Ряд Тейлора

①

Лекція 21

Застосовуємо виразом степеневих рядів,
який зв'язаний з формулою Тейлора,
є ряд Тейлора.

Нехай функція f в $U(x_0)$ має похідні
для $\forall n \exists f^{(n)}(x)$

Означення. Рядом Тейлора функції $f(x)$ в точці
т. x_0 $U(x_0)$ будемо називати ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Таким чином функція f називається ряд Тейлора

записується так $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$

Поставте питання: чи ряд Тейлора збігається
до функції $f(x)$?

Взявши наприклад $f(x) = e^{-1/2 x^2}$ для

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/2 x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{але не } f^{(n)}(x) \equiv 0 \\ \text{але } f(x) \neq 0. \end{matrix}$$

Але є теорема.

Теорема. Для того, щоб ряд Тейлора збігався до
функції $f(x)$ необхідно і достатньо, щоб залишок $z_n(x, f)$
у формулі Тейлора прямував до нуля.

Тобто

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \iff z_n(x, f) \rightarrow 0$$

Абсолютно випливає з означення суми ряду.

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

Відома, що $f(x) - S_n(x) = z_n(x, f)$

Тому

$$S_n(x) \rightarrow f(x) \iff r_n(x, f) \rightarrow 0$$

Теорема. Нехай функція $f(x)$ зображена (зображає) степеневий ряд (як сума степеняного ряду)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \text{ тоді цей ряд } \in$$

її ряд Тейлора.

Довед. В інтервалі збіжності $U(x_0)$ ряд можна поглинати диференцію.

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3(x-x_0) + 4 \cdot 3(x-x_0)^2 a_4 + \dots$$

$$f'''(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4(x-x_0) + \dots$$

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x_0) = 2 \cdot a_2$$

$$f'''(x_0) = 2 \cdot 3 a_3$$

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!}$$

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

Теорема. Нехай в $U(x_0)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad ;$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \quad , \text{ Тоді}$$

$$\forall x \in U(x_0) [f(x) = g(x)] \Rightarrow a_n = b_n$$

Дов. з попередн. теор

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad , \quad b_n = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$i \quad \text{з} \quad f(x) = g(x) \Rightarrow f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x) \Rightarrow a_n = b_n$$

|| З теореми випливає єдиність розкладу функції в степеневий ряд.

Розширення елементарних функцій
в степеневі ряди

Теорема. Нехай для функції f в околі $U_H(x_0)$

$$- \forall n \exists f^{(n)}(x)$$

$$- \exists M \forall n \forall x \in U_H(x_0) [|f^{(n)}(x)| \leq M]$$

Тоді

$$\forall x \in U_H(x_0) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

(це означає, що в околі $U_H(x_0)$ ряд Тейлора збігається до своєї функції $f(x)$)

Довед. Для доведення потрібно показати, що

$$\forall x \in U_H(x_0) \quad z_n(f, x) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

Запишемо $z_n(f, x)$ у формі ЛAGRANGE

$$|z_n(x, f)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{M H^{n+1}}{(n+1)!}$$

Для доказательства, что

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x, f) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}$$

и докажем что ряд сходится. Зададим условие:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{H^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H}{n+2} = 0 < 1, \quad \text{Ряд сходится.}$$

Отсюда следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Подобные рассуждения элементарных функций

1. $f(x) = e^x \quad x_0 = 0$

$$\forall n \quad f^{(n)}(x) = e^x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists (-H, H) \ni x \quad |f^{(n)}(x)| \leq e^H = M$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

2. $f(x) = \sin x$

$$\forall n \quad \exists f^{(n)}(x) = \sin(x + n \frac{\pi}{2})$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f^{(n)}(x)| \leq 1$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots$$

4. Визомо, що $\forall x \quad |x| < 1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

проінтегру.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots$$

$$|x| < 1, x = 1.$$

$$5. (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$|x| < 1$$

Означення елементарних функцій
комплексних змінних

$$e^z \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

Тоді

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) + i \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \right)$$

$$= \cos x + i \sin x$$

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Розв'язання елементарних функцій в степеневі ряди

①

Дег Тейлора

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

З'ясуємо ?!

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \dots \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad |x| < 1$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$$

$$\left(\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2} = -1 + 2x - 3x^2 + \dots + (-1)^n n x^{n-1} + \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - \dots + (-1)^{n+1} n x^{n-1} + \dots$$

$$\frac{1}{(1+x)^m} = \dots$$

$$f(x) = \arctg x$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

$$f(x) = \arcsin x$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{(-1/2)(-x^2)}{1!} + \frac{(-1/2)(-1/2-1)}{2!} (-x^2)^2 + \dots + \frac{(-1/2)(-1/2-1)\dots(-1/2-n+1)}{n!} (-x^2)^n + \dots = \dots$$

по степеням x

$$f(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \dots \right)$$

по степеням $(x-2)$

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{3+(x-2)} = \frac{1}{3(1+\frac{x-2}{3})} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x-2}{3} + \left(\frac{x-2}{3}\right)^2 - \dots + (-1)^n \left(\frac{x-2}{3}\right)^n + \dots \right) = \dots$$

по степеням x

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} =$$

$$= -\frac{A}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} - \frac{B}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

$$= -\frac{A}{2} \left(1 + \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \dots \right) - \frac{B}{3} \left(1 + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x}{3}\right)^n + \dots \right)$$

$$= -\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{3}\right) + \left(\quad \right)x + \left(\quad \right)x^2 + \dots$$

по степеням x

3

$$f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{1-x}{1-x^3} =$$

$$= (1-x) (1+x^3+x^6+\dots+x^{3n}+\dots) =$$

$$= 1-x+x^3-x^4+x^6-x^7+\dots$$

по степеням $x-2$

$$f(x) = e^x = e^{x-2} \cdot e^2 = e^2 \left(1 + \frac{x-2}{1!} + \frac{(x-2)^2}{2!} + \dots + \frac{(x-2)^n}{n!} + \dots \right)$$

по степеням x

$$f(x) = \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{2n!} + \dots \right)$$

по степеням $(x-2)$

$$f(x) = \ln x = \ln(x-2+2) = \ln 2 \left(1 + \frac{x-2}{2} \right) =$$

$$= \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{x-2}{2} \right) = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x-2}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{x-2}{2} \right)^3 - \dots$$

по степеням $\frac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{1}{2-x} = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\frac{2}{x}-1} \right) = -\frac{1}{x} \left(\frac{1}{1-\frac{2}{x}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{x} \left(1 + \frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x} \right)^2 + \dots + \left(\frac{2}{x} \right)^n + \dots \right)$$

(4)

no center $(x-2)$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln(4+3x-x^2) = \ln(4-x)(x+1) = \\
 &= \ln[(2-(x-2))(3+(x-2))] = \\
 &= \ln 2 \left(1 - \frac{x-2}{2}\right) + \ln 3 \left(1 + \frac{x-2}{3}\right) = \\
 &= \ln 2 + \ln\left(1 - \left(\frac{x-2}{2}\right)\right) + \ln 3 + \ln\left(1 + \left(\frac{x-2}{3}\right)\right) \\
 &= \ln 6 + \dots
 \end{aligned}$$

$$\ln(1+x) \sim$$

$$\begin{aligned}
 \ln(1-x) &= \\
 -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots
 \end{aligned}$$

no center x

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x-3}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2} \cdot \left(-\frac{6}{(x-3)^2}\right) = -\frac{3}{x^2+9} = -\frac{1}{3\left(1 + \frac{x^2}{9}\right)} \\
 &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^2} \right) = -\frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{x}{3}\right)^4 - \dots + (-1)^n \left(\frac{x}{3}\right)^{2n} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(x) dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{3^{2n+1}} dx = \\
 &= -\frac{\pi}{4} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}
 \end{aligned}$$

(5)

Объемы ряда

$$f(x) = \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \dots$$

$$x \cdot f(x) = \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{x^{n+2}}{n(n+1)} + \dots$$

$$(x f(x))' = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n} + \dots$$

$$(x f(x))'' = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$\int (x f(x))'' dx = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x) + C$$

$$(x f(x))' = -\ln(1-x) + C \quad C=0$$

$$x f(x) = - \int \ln(1-x) dx + \cancel{C}$$

$$x f(x) = - \int \ln(1-x) dx + \int -x \frac{1}{1-x} dx =$$

$$= -x \ln(1-x) + x + \ln(1-x) + C \quad x=0, C=0$$

$$x f(x) = x + (1-x) \ln(1-x)$$

$$f(x) = 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x)$$